

И.И.АЛИЕВ

# ЭЛЕКТРО ⚡ ТЕХНИЧЕСКИЙ СПРАВОЧНИК

1



# **ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ СПРАВОЧНИК**

Составитель  
проф. И. И. АЛИЕВ

Том 1

ИЗДАТЕЛЬСКОЕ  
ПРЕДПРИЯТИЕ  
РадиоСофт

МОСКВА  
2006

УДК 51; 621.3.01(03)

ББК 22.1; 31.2

Э45

**Рецензенты:**

д. т. н., проф. Ю. С. Волков,

чл. АЭН, д. т. н., проф. В. Я. Беспалов

Э45

**Электротехнический справочник. Т. 1. Составитель**  
**И. И. Алиев. — М.: ИП РадиоСофт, 2006. — 480 с.: ил.**

ISBN 5-93037-157-1

В первом томе представлены краткие справочные сведения по элементарной и высшей математике, сведения о системе СИ, об основах электротехники, об электротехнических проводниковых, диэлектрических, полупроводниковых материалах и изделиях из них.

Для учащихся средних и высших учебных заведений, а также инженерно-технических работников.

УДК 51;621.3.01(03)

ББК 22.1;31.2

ISBN 5-93037-157-1

© Оформление. ИП РадиоСофт, 2006

© Составление. Алиев И. И., 2006

# СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие .....	9
РАЗДЕЛ 1 ЭЛЕМЕНТЫ ОСНОВ МАТЕМАТИКИ .....	11
1. АЛГЕБРА .....	12
1.1. Стандартные математические знаки .....	12
1.2. Пропорции .....	12
1.3. Средние величины .....	13
1.4. Степени .....	14
1.5. Корни .....	14
1.6. Факториалы .....	14
1.7. Бином Ньютона .....	15
1.8. Приближенные значения некоторых выражений .....	16
1.9. Уравнения первой степени с двумя неизвестными .....	16
1.10. Уравнения квадратные .....	17
1.11. Уравнения третьей степени .....	17
1.12. Арифметическая прогрессия .....	18
1.13. Геометическая прогрессия .....	18
1.14. Некоторые арифметические ряды .....	18
1.15. Соединения .....	19
1.16. Мнимые и комплексные числа .....	19
1.17. Логарифмы .....	20
1.18. Сложные проценты и амортизация .....	23
1.19. Определители (детерминанты) .....	23
1.20. Вычисление корней уравнений по способам Ньютона и Regula falsi .....	25
1.21. Неравенства .....	26
2. ГЕОМЕТРИЯ .....	27
2.1. Стандартные геометрические обозначения .....	27
2.2. Измерение углов .....	27
2.3. Плоские фигуры .....	28
2.4. Геометрические тела .....	43
3. ТРИГОНОМЕТРИЯ .....	54
3.1. Стандартные обозначения .....	54
3.2. Тригонометрические величины и формулы .....	54
3.3. Общие формулы для решения треугольников .....	60
3.4. Решение прямоугольных треугольников .....	61
3.5. Решение косугольных треугольников .....	62
3.6. Синусоидальные величины .....	64
4. ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ .....	66
4.1. Стандартные обозначения .....	66
4.2. Сущность гиперболических функций и важнейшие соотношения .....	66
4.3. Обратные гиперболические функции .....	68
5. ЦЕЛЫЕ И ДРОБНЫЕ РАЦИОНАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ .....	70
5.1. Разложение многочлена на множители .....	70
5.2. Разложение дробно-рациональной функции на целую часть и простейшие дроби .....	70
5.3. Метод неопределенных коэффициентов .....	71
6. СТЕПЕННЫЕ ФУНКЦИИ .....	72
7. ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ И ЛОГАРИФИЧЕСКАЯ ФУНКЦИИ .....	73
7.1. Показательная функция .....	73
7.2. Логарифмическая функция .....	74
8. ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ .....	76
8.1. Цилиндрическая функция 1-го рода .....	76
8.2. Формулы приведения .....	76

8.3.	Цилиндрическая функция 2-го рода .....	77
8.4.	Цилиндрическая функция 3-го рода .....	77
8.5.	Дифференциальное уравнение Бесселя .....	78
8.6.	Асимптотические формулы .....	78
8.7.	Модифицированные цилиндрические функции .....	79
9.	ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ .....	83
9.1.	Стандартные обозначения математического анализа .....	83
9.2.	Производные и дифференциалы .....	84
9.3.	Правила дифференцирования .....	86
9.4.	Графическое дифференцирование .....	87
9.5.	Основные теоремы дифференциального исчисления .....	88
9.6.	Вычисление пределов (раскрытие «неопределенностей») .....	89
9.7.	Наибольшие и наименьшие значения .....	90
10.	ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ .....	92
10.1.	Таблица основных неопределенных интегралов .....	92
10.2.	Общие правила интегрирования .....	93
10.3.	Интегрирование рациональных функций .....	93
10.4.	Интегрирование иррациональных функций .....	94
10.5.	Интегрирование тригонометрических функций .....	95
10.6.	Интегралы от других трансцендентных функций .....	96
10.7.	Определенный интеграл .....	97
10.8.	Таблица некоторых определенных интегралов .....	99
10.9.	Приближенное вычисление определенного интеграла .....	100
10.10.	Кратные и криволинейные интегралы. Геометрические приложения интегралов .....	103
11.	РЯДЫ .....	108
11.1.	Числовые ряды .....	108
11.2.	Степенные ряды .....	108
11.3.	Тригонометрические ряды (ряды Эйлера-Фурье) .....	111
12.	ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ .....	115
12.1.	Дифференциальные уравнения первого порядка .....	115
12.2.	Дифференциальные уравнения второго порядка .....	118
12.3.	Некоторые дифференциальные уравнения высших порядков .....	120
12.4.	Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами .....	121
12.5.	Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами .....	124
13.	АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ .....	128
13.1.	Координаты. Точка. Прямая .....	128
13.2.	Общие уравнения и свойства кривых .....	132
13.3.	Алгебраические кривые второго порядка .....	136
13.4.	Алгебраические кривые высших порядков .....	148
13.5.	Трансцендентные кривые .....	152
14.	АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ .....	163
14.1.	Одна точка .....	163
14.2.	Две точки .....	163
14.3.	Плоскость .....	163
14.4.	Кривая в пространстве .....	164
14.5.	Поверхности .....	166
14.6.	Общее уравнение конуса .....	167
14.7.	Эллиптический или гиперболический наклонный цилиндр .....	167
15.	ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ .....	168
15.1.	Правила действий с векторами .....	168
15.2.	Векторная функция скалярного аргумента .....	170
15.3.	Скалярное поле и градиент .....	170
15.4.	Векторное поле, дивергенция и ротор .....	171

16. ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ .....	176
16.1. Обработка результатов непосредственных измерений .....	176
16.2. Правила приближенных вычислений .....	184
16.3. Подбор эмпирических формул .....	187
16.4. Сглаживание эмпирических данных .....	193
РАЗДЕЛ 2 ЭЛЕМЕНТЫ ОСНОВ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ.	
ЕДИНИЦЫ ИЗМЕРЕНИЯ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН .....	195
17. ЭЛЕМЕНТЫ ОСНОВ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ .....	196
17.1. Основные понятия и определения электротехники .....	196
17.1.1. Электрический ток и его частота .....	196
17.1.2. Электродвижущая сила, электрическое напряжение .....	197
17.1.3. Электрическая цепь .....	198
17.1.4. Электрическое сопротивление и его виды .....	198
17.1.5. Электрическая энергия и мощность .....	202
17.2. Основные законы электротехники .....	203
17.3. Основные понятия и законы для магнитных цепей .....	207
17.4. Формулы для расчета емкости и индуктивности .....	210
17.5. Расчетные формулы для цепей постоянного тока .....	212
17.5.1. Метод контурных токов (метод Максвелла) .....	212
17.5.2. Метод двух узлов .....	212
17.5.3. Метод наложения .....	213
17.5.4. Метод эквивалентного генератора .....	213
17.5.5. Преобразование сложных цепей в простые эквивалентные .....	213
17.5.6. Баланс электрических мощностей цепи .....	215
17.6. Переходные процессы в цепях постоянного тока .....	215
17.7. Расчетные формулы для цепей однофазного тока .....	218
17.7.1. Переменные токи и напряжения .....	218
17.7.2. Мощности в цепях переменного тока .....	219
17.8. Расчетные соотношения для цепей трехфазного тока .....	224
17.8.1. Выражения для токов, напряжений и мощностей .....	224
17.8.2. Метод симметричных составляющих .....	225
17.9. Переходные процессы в цепях переменного синусоидального тока .....	226
17.9.1. Включение цепи R-L на синусоидальное напряжение .....	226
17.9.2. Включение цепи R-C на синусоидальное напряжение .....	227
18. ЕДИНИЦЫ ИЗМЕРЕНИЯ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИНЫ В СИСТЕМЕ СИ .....	228
18.1. Основные единицы в системе СИ .....	228
18.2. Дополнительные единицы в системе СИ .....	228
18.3. Единицы механических величин в системе СИ .....	229
18.4. Единицы электромагнитных величин в системе СИ .....	230
18.5. Пересчет единиц физических величин .....	232
18.6. Единицы физических величин, применяемые в отечественной и зарубежной практике .....	233
18.7. Физические константы, используемые в электротехнике .....	237
18.8. Буквы латинского и греческого алфавита, принятые для обозначения электрических и магнитных величин .....	238
РАЗДЕЛ 3 ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ И ИЗДЕЛИЯ .....	
19. ПРОВОДНИКОВЫЕ МАТЕРИАЛЫ И ИХ ХАРАКТЕРИСТИКИ .....	242
19.1. Классификация и свойства проводниковых материалов .....	242
19.2. Медь и проводниковые материалы на ее основе .....	246
19.2.1. Медные слитки .....	247
19.2.2. Листы и полосы .....	247
19.2.3. Катанка медная .....	248

19.2.4.	Проволока медная круглая .....	249
19.2.5.	Проволока прямоугольного сечения, ленты и шины медные для электротехнических целей .....	252
19.2.6.	Трубы медные .....	253
19.2.7.	Фольга медная электролитическая .....	254
19.2.8.	Наконечники медные .....	255
19.3.	Сплавы на основе меди .....	257
19.3.1.	Латуни .....	257
19.3.2.	Бронза .....	258
19.4.	Алюминий и проводниковые материалы на его основе .....	259
19.4.1.	Катанка алюминиевая .....	260
19.4.2.	Проволока алюминиевая круглая электротехническая (ГОСТ 6132-79) .....	260
19.4.3.	Шины электротехнического назначения .....	262
19.4.4.	Гильзы и наконечники кабельные алюминиевые .....	263
19.5.	Серебро, золото и сплавы на их основе .....	264
19.6.	Сталь и материалы из стали .....	266
19.6.1.	Стальная проволока .....	266
19.6.2.	Стальные полосы и ленты .....	267
19.6.3.	Сталь угловая и швеллерная .....	268
19.6.4.	Трубы стальные .....	269
19.6.5.	Листовая сталь .....	270
19.7.	Свинец .....	271
19.8.	Олово .....	271
19.9.	Сплавы с высоким электрическим сопротивлением .....	272
19.9.1.	Физические свойства .....	272
19.9.2.	Проволока манганиновая неизолированная .....	273
19.9.3.	Проволока константовая неизолированная .....	276
19.9.4.	Проволока из марганцевого никеля .....	276
19.9.5.	Проволока из сплавов на железохромистой основе .....	277
19.9.6.	Лента из прецизионных сплавов на железохромистой основе .....	278
19.9.7.	Прокат из прецизионных сплавов с высоким электрическим сопротивлением .....	279
19.9.8.	Проволока тончайшая и наитончайшая из сплавов высокого электрического сопротивления .....	281
19.10.	Жаростойкие проводниковые сплавы .....	283
19.11.	Биметаллические изделия .....	283
19.11.1.	Термобиметаллы .....	283
19.11.2.	Проволока биметаллическая сталемедная .....	286
19.12.	Коммутирующие контакты и материалы .....	286
19.12.1.	Слаботочные контакты .....	287
19.12.2.	Сильноточные коммутирующие контакты .....	289
19.13.	Припой .....	290
19.13.1.	Оловянно-свинцовые припой .....	291
19.13.2.	Припой серебряные .....	294
19.13.3.	Припой твердые на основе меди и цинка .....	294
19.13.4.	Припой на алюминиевой основе .....	294
20.	МАГНИТНЫЕ МАТЕРИАЛЫ .....	298
20.1.	Основные определения и классификация .....	298
20.2.	Сталь электротехническая тонколистовая .....	301
20.2.1.	Сталь электротехническая горячекатаная тонколистовая (ГОСТ 21427.3-75) .....	303
20.2.2.	Электротехническая горячекатаная тонколистовая сталь с нормированным коэффициентом заполнения .....	305
20.2.3.	Сталь электротехническая холоднокатаная изотропная тонколистовая .....	306

20.2.4.	Электротехническая холоднокатаная анизотропная тонколистовая сталь .....	308
20.2.5.	Лента стальная электротехническая холоднокатаная анизотропная (ГОСТ 21427.4-78) .....	309
20.2.6.	Сталь электротехническая анизотропная холоднокатаная с пониженным уровнем магнитных потерь марок 3406 и 3407 (ТУ 14-1-2937-80) .....	310
20.2.7.	Сталь сортовая электротехническая нелегированная ....	310
20.3.	Магнитомягкие прецизионные сплавы (пермаллой) .....	311
20.4.	Магнитомягкие аморфные и нанокристаллические сплавы ГАММАМЕТ .....	316
20.4.1.	Особенности технологии и конструкции .....	316
20.4.2.	Магнитные свойства магнитопроводов ГАММАМЕТ в защитных контейнерах .....	319
20.4.3.	Магнитные свойства магнитопроводов ГАММАМЕТ типа ДС .....	320
20.5.	Ферриты .....	325
20.6.	Магнитотвердые материалы .....	327
20.6.1.	Железо-никель-алюминиевые нековкие сплавы дисперсионного твердения — литые магниты .....	328
20.6.2.	Материалы магнитотвердые спеченные .....	331
20.6.3.	Материалы магнитотвердые деформируемые .....	333
20.6.4.	Магниты металлокерамические постоянные .....	334
20.6.5.	Легированная магнитотвердая сталь .....	335
20.6.6.	Ферритовые магнитотвердые материалы (ферромагниты) .....	336
21.	КЛАССИФИКАЦИЯ И ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ .....	338
21.1.	Основные определения и классификация диэлектрических материалов .....	338
21.2.	Основные характеристики электроизоляционных материалов ....	340
21.2.1.	Электрические характеристики диэлектрических материалов .....	340
21.2.2.	Механические, физико-химические и тепловые характеристики диэлектриков .....	343
21.3.	Газообразные диэлектрики .....	347
21.4.	Жидкие диэлектрики .....	348
21.4.1.	Нефтяные масла .....	350
21.4.2.	Синтетические масла .....	352
21.5.	Высокополимерные диэлектрики (смолы) .....	355
21.5.1.	Смолы природного происхождения .....	355
21.5.2.	Синтетические полимеры (смолы) .....	356
21.6.	Электроизоляционные лаки .....	362
21.7.	Электроизоляционные эмали .....	367
21.8.	Компаунды .....	369
21.9.	Диэлектрические волокнистые непитанные материалы .....	373
21.9.1.	Электроизоляционные бумаги .....	373
21.9.2.	Электроизоляционные картоны .....	382
21.9.3.	Фибра листовая .....	385
21.9.4.	Электроизоляционные ткани .....	388
21.9.5.	Ткани асбестовые (ГОСТ 6102-78) .....	390
21.9.6.	Электроизоляционные ленты .....	391
21.10.	Диэлектрические волокнистые пропитанные материалы .....	397
21.10.1.	Лакоткани .....	397
21.10.2.	Ленты электроизоляционные .....	403
21.11.	Пластические массы .....	405
21.11.1.	Аминопласты .....	405

21.11.2.	ДСВ пластмасса .....	407
21.11.3.	Пластмасса марки АГ-4 .....	407
21.11.4.	Пластмассы на основе кремнийорганической смолы и минеральных наполнителей .....	408
21.11.5.	Полистирол .....	409
21.11.6.	Фторопласты .....	410
21.11.7.	Пластикат поливинилхлоридный .....	412
21.11.8.	Композиция полиэтилена для кабельной изоляции .....	414
21.11.9.	Гетинаксы .....	415
21.11.10.	Гетинакс фольгированный .....	419
21.11.11.	Текстолит электротехнический листовой (ГОСТ 2910-74, ТУ 05758799-014-96) .....	420
21.11.12.	Стеклотекстолит электротехнический листовой (ГОСТ 12652-74, ТУ 057587799-97, ТУ 05758799-077-2002) .....	423
21.11.13.	Стеклотекстолит фольгированный (ГОСТ 10316-78) .....	427
21.11.14.	Пленки пластмассовые электроизоляционные .....	429
22.	ФАРФОРОВЫЕ, СТЕКЛЯННЫЕ И ПОЛИМЕРНЫЕ ИЗОЛЯТОРЫ .....	434
22.1.	Общие сведения .....	434
22.2.	Изоляторы фарфоровые и стеклянные низковольтные .....	436
22.3.	Изоляторы высоковольтные фарфоровые и стеклянные штыревые .....	438
22.4.	Изоляторы подвесные фарфоровые и стеклянные .....	439
22.5.	Изоляторы опорные фарфоровые .....	440
22.6.	Изоляторы проходные фарфоровые .....	443
22.7.	Изделия кордиеритовые .....	446
22.8.	Изоляторы подвесные высокополимерные .....	446
23.	КОНДЕНСАТОРЫ .....	450
23.1.	Основные параметры конденсаторов .....	450
23.2.	Конденсаторы типа ДПС и КЭМ .....	455
23.3.	Конденсаторы низковольтные для повышения коэффициента мощности .....	456
23.4.	Конденсаторы для электротермических установок .....	458
23.5.	Конденсаторы связи .....	460
23.6.	Конденсаторы сверхвысокой емкости или молекулярные конденсаторы .....	461
23.6.1.	Конденсаторы энергоемкие импульсные (ИКЭ) .....	461
23.6.2.	Электрохимические конденсаторы типа ЭК .....	464
24.	ПОЛУПРОВОДНИКОВЫЕ МАТЕРИАЛЫ .....	468
24.1.	Основные определения .....	468
24.2.	Германий .....	470
24.3.	Кремний .....	471
25.	СВЕРХПРОВОДЯЩИЕ МАТЕРИАЛЫ .....	475
	ЛИТЕРАТУРА .....	478

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Миллионы людей в повседневной жизни постоянно имеют дело с электротехническими устройствами и различным электрооборудованием. Одни используют электротехническое оборудование на работе, или дома, на приусадебных участках и т. д., другие занимаются его проектированием, обслуживанием или ремонтом. Учащаяся молодежь любого негуманитарного высшего и среднего специального учебного заведения изучает основы электротехники и знакомится с электротехническим оборудованием на лабораторных занятиях, при курсовом и дипломном проектировании.

Появились и адаптированные справочные издания, рассчитанные на читателей, не обладающих специальной подготовкой. Однако они, имея описательный характер, содержат, как правило, сравнительно небольшой объем технической информации в какой-либо отрасли электротехники.

Автором было создано несколько изданий Справочника, которые пользовались у читателя неизменным успехом. Они представляли собой книги сравнительно небольшие по объему, но весьма насыщенные конкретной технической информацией по разным отраслям электротехники и электрооборудования. Настоящее трехтомное издание является результатом коренной переработки этих справочников. В трехтомник включены новые разделы, которых не было в предыдущих изданиях, прежние разделы существенно доработаны и дополнены новыми материалами, в том числе технической информацией, полученной непосредственно из новых заводских каталогов и сайтов интернета.

В первый том Справочника включен специально подготовленный раздел, в котором представлены краткие справочные сведения по элементарной и высшей математике. Позитивный опыт других, более ранних специализированных изданий показал, что читателю удобно в одной книге, помимо собственно инженерно-технических сведений, иметь также минимальный математический аппарат, используемый при решении как простых практических задач повседневной жизни, так и научно-технических задач той или иной степени сложности.

Первый том включает также разделы, в которых представлены сведения о единицах измерения физических величин — системе СИ, а также о единицах измерения в старинных русских мерах, единицах измерения, используемых на практике в ряде зарубежных стран. Кроме того, здесь представлены сведения об основах электротехники: основные определения и законы,

основные уравнения и формулы, которые используются для расчета простых электрических и магнитных цепей в установившихся и переходных процессах; разделы, посвященные электротехническим проводниковым, диэлектрическим и полупроводниковым материалам и изделиям из них.

В двух последующих томах предполагается представить сведения о проводах и кабелях, включая новейшие типы оптоволоконных кабелей. Разделы об электрических машинах и трансформаторах будут существенно дополнены не только техническими сведениями, но и основными расчетными формулами. Основательно расширятся разделы об электрических аппаратах, силовых полупроводниковых приборах: диодах, транзисторах, тиристорах, измерительных приборах.

Будут приведены сведения о бытовом электрооборудовании, которое находит всё большее распространение: электроинструмент, насосы, устройства отопления, нагрева и др., об альтернативных — возобновляемых и невозобновляемых — источниках электроэнергии и аккумуляторах, о сварочном и ином технологическом электрооборудовании. В справочник входят сведения, в основном, об отечественном электрооборудовании, приводятся названия некоторых заводов-изготовителей России, а также Беларуси и Украины.

Кроме того, будут представлены краткие сведения о системах электроснабжения, соотношения для расчета и выбора сечения и типа проводов, автоматических выключателей, предохранителей, сведения о выполнении электропроводки. В раздел об электроприводах войдут основные сведения и расчетные формулы для выбора электродвигателей для механизмов с различным режимом работы, а в раздел об электробезопасности — сведения об организации безопасной работы с электротехническими установками и о средствах защиты от поражения электрическим током. Приводятся условные графические обозначения некоторых элементов электрических цепей.

Автор выражает глубокую признательность рецензентам книги: кафедре электротехники МГОУ (зав. кафедрой — доктор технических наук, профессор, Ю. С. Волков) и действительному члену АЭН, доктору технических наук, профессору МЭИ (ТУ) В. Я. Беспалову.

Автор надеется, что трехтомное издание окажется столь же востребованным и полезным для читателя в его повседневной работе, как и предыдущие издания. Вместе с тем, автор с благодарностью примет все предложения и пожелания читателей, направленные на дальнейшее совершенствование этой книги.

*Профессор И.И. Алиев*

## **Раздел 1**

# **Элементы основ математики**

# 1. АЛГЕБРА

## 1.1. Стандартные математические знаки

- = равно;
- ≡ тождественно с... или тождественно равно (применяется в случае, когда желательно особо отметить тождественность обеих частей равенства);
- ≠ не равно;
- ≈ приближенно равно;
- > больше;
- < меньше;
- ≥ больше или равно;
- ≤ меньше или равно;
- ≫ велико сравнительно с;
- ≪ мало сравнительно с;
- % процент (одна сотая);
- ‰ промилле (одна тысячная);
- $\log_b$  логарифм при основании  $b$  (в тех случаях, когда нет необходимости указывать основание, соответствующий подстрочный значок при  $\log$  опускается);
- $\lg$  логарифм при основании 10 (обыкновенный, или десятичный логарифм);
- $\ln$  логарифм при основании  $e = 2,718281828...$  (натуральный логарифм).

Для обозначения степени логарифма показатель степени ставится при знаке логарифма, например  $\log_2^3 a$ .

Абсолютное значение числа обозначается двумя вертикальными чертами, например  $|-273|$ .

## 1.2. Пропорции

*Арифметическая пропорция:*

если  $a - b = c - a$ , то

$$a - c = b - d.$$

*Геометрическая пропорция:*

если  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ , то

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}; \quad ad = bc; \quad \frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}; \quad \frac{a \pm c}{c} = \frac{b \pm d}{d}; \quad \frac{a \pm c}{b \pm d} = \frac{c}{d}.$$

Вообще, если  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ , то

$$\frac{ma \pm nb}{pa \pm qb} = \frac{mc \pm nd}{pc \pm qd}$$

или, если  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \dots$ , то

$$\frac{ma + nc + pe + \dots}{mb + nd + pf + \dots} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \dots$$

*Гармоническая пропорция:*

$$\frac{a-b}{c-d} = \frac{a}{d}.$$

### 1.3. Средние величины

*Средняя арифметическая:*

если  $a - x = x - b$ , то

$$x = \frac{a+b}{2}.$$

*Средняя геометрическая или средняя пропорциональная:*

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b}; \quad x = \sqrt{ab}.$$

*Средняя гармоническая:*

$$\frac{a-x}{x-b} = \frac{a}{b}; \quad x = \frac{2ab}{a+b}.$$

При  $n$  членах  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ :

*средняя арифметическая:*

$$x_a = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n},$$

*средняя геометрическая:*

$$x_g = \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \dots a_n},$$

*средняя гармоническая:*

$$x_h = 1 : \frac{1}{n} \left( \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right).$$

*Теорема Коши:*

$$x_a > x_g > x_h.$$

Величина средняя квадратичная:

$$x = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}.$$

## 1.4. Степени

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}; \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}; \quad a^0 = 1; \quad a^{-m} = \frac{1}{a^m};$$

$$\frac{1}{a^{-m}} = a^m; \quad (-a)^{2n} = +a^{2n}; \quad (-a)^{2n+1} = -a^{2n+1};$$

$$(a^m)^n = a^{mn} = (a^n)^m; \quad (ab)^m = a^m \cdot b^m; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m};$$

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b); \quad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2; \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2;$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3; \quad (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3;$$

$$(a+b+c+d)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2(a+b)c + c^2 + 2(a+b+c)d + d^2 = \\ = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd.$$

**Теорема Безу** (делимость разности и суммы одинаковых степеней двух количеств на разность или сумму тех же количеств):

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1});$$

$$a^{2n} - b^{2n} = (a+b)(a^{2n-1} - a^{2n-2}b + a^{2n-3}b^2 - \dots - b^{2n-1});$$

$$a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - \dots - b^{2n}).$$

## 1.5. Корни

$$\sqrt[m]{a} = \pm b; \quad \sqrt[m]{-a} = \pm b\sqrt{-1}; \quad \sqrt[m]{a} = +c; \quad \sqrt[m]{-a} = -c;$$

$$\sqrt[m]{a^m} = a; \quad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m; \quad \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}};$$

$$\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[m]{a^p} = \sqrt[m \cdot p]{a^{n \cdot p}}; \quad \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{m}} \cdot a^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{m+n}{mn}} = \sqrt[mn]{a^{m+n}};$$

$$\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[m]{a^{-n}} = 1 : \sqrt[m]{a^n}; \quad \sqrt[m]{ab} = \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = a^{\frac{1}{m}} \cdot b^{\frac{1}{m}}; \quad \sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b}.$$

## 1.6. Факториалы

Произведение  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ , где  $n$  — целое положительное число, называется факториалом.



При  $n$  каком угодно:

$$(1 \pm x)^n = 1 \pm nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 \pm \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots; \quad |x| < 1.$$

$$(a+b)^n = a^n \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n = a^n (1+x)^n \text{ и т. д. } |b| < |a|.$$

## 1.8. Приближенные значения некоторых выражений

$\sqrt{a^2 + b^2} \approx 0,96a + 0,4b$  при  $a > b$  (формула Понселе).  
Ошибка менее 4% действительной величины.

$$\left. \begin{aligned} (1 \pm \beta)^n &\approx 1 \pm n\beta; & \sqrt[n]{1 \pm \beta} &\approx 1 \pm \frac{\beta}{n}; \\ \frac{1}{(1 \pm \beta)^n} &\approx 1 \mp n\beta; & \frac{1}{\sqrt[n]{1 \pm \beta}} &\approx 1 \mp \frac{\beta}{n} \end{aligned} \right\} \text{ Здесь } \beta \text{ — весьма малая ве-} \\ \text{личина, квадратом которой} \\ \text{можно пренебречь.}$$

**Примеры:**

$$1,001^2 = 1,002; \quad 0,998^2 = (1 - 0,002)^2 = 0,996;$$

$$\frac{1}{1,0003} = \frac{1}{(1 + 0,0003)^1} = 1 - 0,0003 = 0,9997;$$

$$\sqrt{1,004} = 1 + \frac{0,004}{2} = 1,002; \quad \frac{1}{\sqrt{1,004}} = 1 - \frac{0,004}{2} = 0,998.$$

Если  $\beta$  весьма мало по сравнению с  $A$ , то

$$\sqrt{A^2 \pm \beta} \approx A \pm \frac{\beta}{2A}; \quad \sqrt[3]{A^2 \pm \beta} \approx A \pm \frac{\beta}{3A^2};$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{(1 \pm \beta)}{(1 \pm \gamma)} &\approx 1 \pm \beta \pm \gamma; & (1 \pm \beta)(1 \pm \gamma)(1 \pm \delta) &\approx 1 \pm \beta \pm \gamma \pm \delta \\ A^\beta &\approx 1 + \beta \ln A; & \ln(1 \pm \beta) &\approx \pm \beta - \frac{1}{2}\beta^2 \end{aligned} \right\} \text{ Здесь } \beta, \gamma, \delta \text{ —} \\ \text{весьма малые} \\ \text{величины.}$$

## 1.9. Уравнения первой степени с двумя неизвестными

$$\left. \begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{aligned} \right\} x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}; \quad y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

## 1.10. Уравнения квадратные

$$\left. \begin{aligned} x^2 + px + q &= 0 \\ x &= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}; \\ ax^2 + bx + c &= 0 \\ x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} x_1 + x_2 &= -p = -\frac{b}{a} \\ x_1 x_2 &= q = \frac{c}{a} \end{aligned}$$

Трехчлен 2-й степени:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

где  $x_1$  и  $x_2$  — корни трехчлена.

## 1.11. Уравнения третьей степени

Всякое уравнение вида

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

подстановкой  $x = y - \frac{a}{3}$  приводится к виду:

$$y^3 + 3py + 2q = 0.$$

1) Если  $q^2 + p^3 > 0$ , то получается один вещественный корень по формуле Кардана:

$$y_1 = \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}} + \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2 + p^3}};$$

остальные корни — мнимые сопряженные.

2) Если  $q^2 + p^3 < 0$  и, следовательно,  $p < 0$ , то все корни — вещественные, однако же формула Кардана дает их в мнимой форме — неприводимый случай (casus irreducibilis). В этом случае применяется тригонометрическое решение:

$$\cos \varphi = \frac{-q}{\sqrt{-p^3}},$$

тогда

$$\begin{aligned} y_1 &= 2\sqrt{-p} \cdot \cos \frac{\varphi}{3}, \\ y_2 &= -2\sqrt{-p} \cdot \cos \left( \frac{\varphi}{3} + 60^\circ \right), \\ y_3 &= -2\sqrt{-p} \cdot \cos \left( \frac{\varphi}{3} - 60^\circ \right). \end{aligned}$$

3) Если  $q^2 + p^3 = 0$ , то уравнение имеет два различных вещественных корня (из них один двойной):

$$y_1 = 2\sqrt[3]{-q}, \quad y_2 = y_3 = -\sqrt[3]{-q}.$$

## 1.12. Арифметическая прогрессия

$$a, a+d, a+2d, a+3d, \dots$$

$n$ -й член прогрессии

$$a_n = a + (n-1)d;$$

сумма  $n$  первых членов

$$S_n = \frac{a + a_n}{2} n = \frac{2a + (n-1)d}{2} n.$$

## 1.13. Геометическая прогрессия

$$a, aq, aq^2, aq^3, \dots$$

$n$ -й член прогрессии

$$a_n = aq^{n-1};$$

сумма  $n$  первых членов

$$S_n = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{a_n q - a}{q - 1}.$$

Если знаменатель  $q$  прогрессии — правильная дробь, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S = \frac{a}{1 - q}.$$

## 1.14. Некоторые арифметические ряды

$$1) 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2};$$

$$2) 2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 2n = n(n+1);$$

$$3) 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n-1) = n^2;$$

$$4) 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

$$5) 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + n^3 = \left[ \frac{n(n+1)}{2} \right]^2;$$

$$6) 1^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4 + \dots + n^4 = \frac{n}{30}(n+1)(2n+1)(3n^2 + 3n - 1);$$

$$7) 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots = 2.$$

## 1.15. Соединения

**1. Перестановки** (permutations). Число перестановок из  $n$  разных элементов:

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = n! \quad (\text{см. Факториалы}).$$

Если в числе  $n$  элементов имеются по  $\alpha, \beta, \gamma \dots$  одинаковых элементов, то

$$P_n = \frac{n!}{\alpha! \beta! \gamma! \dots}.$$

**2. Размещения** (arrangements). Число размещений из  $n$  элементов по  $m$ :

$$A_n^m = n(n-1)(n-2) \dots [n-(m-1)].$$

**3. Сочетания** (combinations). Число сочетаний из  $n$  элементов по  $m$ :

$$C_n^m = A_n^m : P_n = \frac{n(n-1)(n-2) \dots [n-(m-1)]}{n!},$$

$$C_n^m = C_n^{n-m}; \quad C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}.$$

## 1.16. Мнимые и комплексные числа

### 1. Мнимый знак

$$i = \sqrt{-1}. \quad i^0 = 1; \quad i^2 = -1; \quad i^3 = -i; \quad i^4 = 1; \quad i^{4n+m} = i^m;$$

$$i^{-1} = -i; \quad i^i = e^{-\frac{\pi}{2}} = 0,20788; \quad e^{\frac{i\pi}{2}} = i; \quad e^{2k\pi i} = 1; \quad e^{x+2k\pi i} = e^x,$$

где

$$k = 0, \pm 1, \pm 2 \dots; \quad \sqrt{\pm i} = \sqrt{\frac{1}{2}} \pm i \sqrt{\frac{1}{2}} = (1 \pm i) \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

### 2. Комплексное число

$$a + bi = r(\cos \alpha + i \sin \alpha) = re^{i\alpha},$$

где

$$r = \text{модуль} = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \alpha = \text{аргумент},$$

$$a = r \cos \alpha, \quad b = r \sin \alpha, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}.$$

Вообще

$$a + bi = r[\cos(\alpha + 2k\pi) + i \sin(\alpha + 2k\pi)] = re^{i(\alpha + 2k\pi)},$$

где  $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Если  $a + bi = 0$ , то  $a = 0$  и  $b = 0$ .

Если  $a_1 + b_1 i = a_2 + b_2 i$ , то  $a_1 = a_2$  и  $b_1 = b_2$ .

При умножении комплексных чисел модули перемножаются, а аргументы складываются:-

$$r_1(\cos \alpha_1 \pm i \sin \alpha_1) r_2(\cos \alpha_2 \pm i \sin \alpha_2) = r_1 r_2 [\cos(\alpha_1 + \alpha_2) \pm i \sin(\alpha_1 + \alpha_2)].$$

Формула Муавра:

$$(\cos \alpha \pm i \sin \alpha)^n = \cos n\alpha \pm i \sin n\alpha$$

или вообще

$$(\cos \alpha \pm i \sin \alpha)^{\frac{m}{n}} = \cos \frac{m}{n}(\alpha + 2k\pi) \pm i \sin \frac{m}{n}(\alpha + 2k\pi),$$

где  $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Формулы Эйлера:

$$\cos \alpha + i \sin \alpha = e^{i\alpha}; \quad \cos \alpha - i \sin \alpha = e^{-i\alpha} = \frac{1}{\cos \alpha + i \sin \alpha};$$

$$\cos \alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}; \quad \sin \alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}.$$

Комплексное число можно представить на плоскости в виде точки, определяемой координатами  $x = a$  и  $y = b$  (в прямоугольной системе координат). Расстояние этой точки от начала координат равно модулю  $r = +\sqrt{a^2 + b^2}$ .

Примечание. В электротехнике обозначают мнимый знак буквой  $j$ , а основание натуральных логарифмов буквой  $e$ , так как буквы  $i$  и  $e$  служат — первая для обозначения силы тока, а вторая для обозначения электродвижущей силы.

## 1.17. Логарифмы

Логарифмом положительного числа  $N$  при положительном основании  $b$  называется показатель степени  $x$ , в которую нужно возвести основание, чтобы получить число  $N$ , т. е.

если  $N = b^x$ , то  $x = \log_b N$ .

Иногда число  $N$  называют антилогарифмом  $x$ .

$$\log \infty = +\infty, \quad \log 0 = -\infty$$

$$\text{при } N > 1 \dots \log N > 0, \quad N < 1 \dots \log N < 0.$$

$$\log(A \cdot B) = \log A + \log B; \quad \log \frac{A}{B} = \log A - \log B;$$

$$\log A^n = n \log A; \quad \log \sqrt[n]{A} = \frac{1}{n} \log A.$$

**1. Обыкновенные логарифмы.** Логарифмы, вычисленные при основании  $b = 10$ , называются обыкновенными, десятичными или Бригговыми. Логарифм состоит из характеристики (целой части) и мантиссы (дробной части).

Если  $N > 1$ , то число положительных единиц в характеристике на единицу меньше числа цифр в целой части  $N$ , например,

$$\lg 2 = 0,30103; \quad \lg 20 = 1,30103; \quad \lg 200 = 2,30103.$$

Если  $N < 1$ , то в характеристике столько отрицательных единиц (при положительной мантиссе), сколько нулей предшествует первой значащей цифре числа  $N$ , считая и нуль на месте целой части, например,

$$\lg 0,2 = \bar{1},30103; \quad \lg 0,02 = \bar{2},30103; \quad \lg 0,002 = \bar{3},30103.$$

Если данное число имеет больше четырех значащих цифр, то при отыскании мантиссы по четырехзначным таблицам следует его округлить до четвертой цифры (увеличив ее на единицу, если первая отбрасываемая цифра больше пяти).

Иногда требуется сделать весь логарифм отрицательным — для этого пишем, например,

$$\bar{4},6663 = \bar{4},6663 + 1 - 1 = (-4 + 1) + (-1 + 0,6663) \quad \text{или} \quad \bar{4},6663 = -3,3337,$$

т. е. абсолютную величину характеристики уменьшаем на единицу и все цифры мантиссы вычитаем из девяти, за исключением последней цифры, которую вычитаем из десяти.

Вычитание логарифмов часто заменяют сложением, пользуясь дополнением логарифма до 10 («colg»), которое представляет собою разность между 10 и логарифмом:

$$\lg A - \lg B = \lg A + (10 - \lg B) - 10 = \lg A + \text{colg } B - 10.$$

Чтобы получить colg, надо вычесть характеристику и все цифры мантиссы из 9, за исключением последней цифры, которая вычитается из 10.

Обратная задача, т. е. нахождение числа  $N$  по данному логарифму, решается при помощи таблицы антилогарифмов. Применяется она таким же способом, как и таблица логарифмов.

**Пример.**

Вычислить диаметр водопроводной трубы по формуле Фламана:

$$d = \sqrt[4,75]{k \frac{Q^{1,75}}{i}} \text{ м,}$$

где  $k$  — практический коэффициент — для труб, бывших в действии = 0,0014;  $Q$  — расход = 0,015 м<sup>3</sup>/с;  $i$  — относительная потеря напора =  $\frac{h}{l}$ , причем  $h$  — полная потеря напора = 1,3 м и  $l$  — длина трубы = 750 м. Таким образом:

$$d = \sqrt[4,75]{0,0014 \cdot \frac{0,015^{1,75} \cdot 750}{1,3}}$$

или

$$\lg d = \frac{1}{4,75} (\lg 0,0014 + 1,75 \lg 0,015 + \lg 750 + \operatorname{colg} 1,3 - 10) = 1,3085. \quad d = 0,2034 \text{ м.}$$

Современные калькуляторы и ПЭВМ позволяют определять логарифмы чисел непосредственно.

**2. Натуральные логарифмы.** Логарифмы, вычисленные при основании, равном иррациональному числу

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots = 2,718281828\dots,$$

называются натуральными, гиперболическими или Неперовыми логарифмами. Таким образом,

если  $N = e^x$ , то  $x = \ln N$ .

Между логарифмами обыкновенными ( $\lg$ ) и натуральными ( $\ln$ ) существуют соотношения:

$$\lg N = \lg e \cdot \ln N = M \ln N, \quad \ln N = \ln 10 \cdot \lg N = \frac{1}{M} \lg N,$$

где  $M$  — модуль Бригговских логарифмов =  $\lg e = 0,43429448\dots$ ;  
 $\frac{1}{M} = \ln 10 = 2,30258509\dots$

Натуральные логарифмы можно определять и непосредственно по таблицам, приводимым в справочниках по математике, а также посредством калькулятора или ПЭВМ.

**3. Показательные и логарифмические ряды**

$$1) e^{\pm x} = 1 \pm \frac{x}{1!} \pm \frac{x^2}{2!} \pm \frac{x^3}{3!} + \dots, \quad -\infty < x < +\infty;$$

$$2) a^x = e^{x \ln a} = 1 + \frac{x \ln a}{1!} + \frac{x^2 \ln^2 a}{2!} + \frac{x^3 \ln^3 a}{3!} + \dots, \quad -\infty < x < +\infty;$$

$$3) \ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots, \quad -1 < x \leq +1;$$

$$4) \ln(1-x) = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots, \quad -1 \leq x < +1.$$

## 1.18. Сложные проценты и амортизация

Капитал  $K$  при сложных процентах  $p$  (годовых) обратится через  $n$  лет в

$$K_n = Kq^n, \text{ где } q = 1 + \frac{p}{100}.$$

Эта же формула служит для определения прироста населения при проектировании водопроводов и канализаций.

Срок увеличения капитала от  $K$  до  $K_n$ :

$$n = \frac{\lg K_n - \lg K}{\lg q} \text{ лет.}$$

Срок удвоения  $n = \frac{\lg 2}{\lg q}$ , утроения  $n = \frac{\lg 3}{\lg q}$  и т. д.

Действительная стоимость в настоящий момент капитала  $K_n$ , подлежащего уплате через  $n$  лет:

$$K = \frac{K_n}{q^n}.$$

Погашение (амортизация) капитала  $K$  в  $n$  лет ежегодными взносами  $a$  в конце каждого года при сложных процентах  $p$ :

$$a = K \frac{(q-1)q^n}{q^n - 1} \text{ или } p_1 = 100 \frac{(q-1)q^n}{q^n - 1},$$

где  $p_1$  — величина полного погашения, выраженная в процентах от первоначального капитала.

## 1.19. Определители (детерминанты)

**1. Определители 2-го порядка** пишутся, согласно обозначению Коши, в виде

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1,$$

т. е. разворачивание определителя производится путем перемножения элементов по диагонали (правило Коши).

Во всяком определителе горизонтальные ряды элементов называются строками, а вертикальные — столбцами или колоннами.

**2. Определители 3-го порядка** разворачиваются на основании следующих правил:

1) Правило Саррюса — подписать под определителем две первые строки и составить шесть произведений, как ниже указано (первые три со знаком плюс, остальные со знаком минус):

$$= a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3.$$

Примечание. Правило Саррюса не применимо к определителям выше 3-го порядка.

2) Правило миноров. Ниже показано разворачивание по элементам первой строки. Определители  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$ , получающиеся после вычеркивания в данном определителе  $D$  одной строки и одного столбца (как ниже указано), называются минорами или субдетерминантами.

$$A_1 = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad B_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad C_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 A_1 - b_1 B_1 + c_1 C_1 = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

или

$$D = a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 - b_1 a_2 c_3 + b_1 a_3 c_2 + c_1 a_2 b_3 - c_1 a_3 b_2.$$

Подобное разворачивание можно произвести по элементам любой строки или любого столбца.

Определители высших порядков разворачивают с помощью миноров, постепенно понижая порядок определителя:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \dots \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \dots \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \dots \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \dots \\ b_3 & c_3 & d_3 \dots \\ b_4 & c_4 & d_4 \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 & d_2 \dots \\ a_3 & c_3 & d_3 \dots \\ a_4 & c_4 & d_4 \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & d_2 \dots \\ a_3 & b_3 & d_3 \dots \\ a_4 & b_4 & d_4 \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} - \dots$$

**Правило знаков.** Перед коэффициентом минора ставится знак плюс, если ряды, после вычеркивания которых получился данный минор, оба нечетные или оба четные; если же один ряд четный, а другой нечетный, то ставится знак минус.

Другой способ вычисления определителей — постепенное преобразование определителей на основании их свойств.

### 3. Свойства определителей

1. Величина определителя не изменится, если все его строки сделать столбцами, а столбцы строками («транспонирование определителей»).

2. Определитель переменит свой знак, если два параллельных ряда поменяются местами.

3. Определитель равен нулю, если два параллельных ряда одинаковы, или пропорциональны, или если все элементы одного ряда нули.

4. Определитель умножается на  $k$ , если все элементы одного ряда умножить на  $k$ .

5. Величина определителя не изменится, если к элементам одного ряда прибавить соответствующие элементы другого ряда, умноженные на одно и то же число, например:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 + ka_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 + ka_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 + ka_3 \end{vmatrix}.$$

6. Определитель можно разложить на сумму двух определителей, если каждый элемент одного ряда равен сумме двух величин, например:

$$\begin{vmatrix} a_1 + d_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + d_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

## 1.20. Вычисление корней уравнений по способам Ньютона и Regula falsi

**1. Способ Ньютона.** Если  $x = a_1$  есть первое приближенное значение корня уравнения  $f(x) = 0$ , найденное попытками или графически, то более точные значения корня:

$$a_2 = a_1 - \frac{f(a_1)}{f'(a_1)}, \quad a_3 = a_2 - \frac{f(a_2)}{f'(a_2)} \text{ и т. д.,}$$

где  $f'$  — первая производная функции  $f$ .

**2. Способ Regula falsi.** Пусть  $a_1$  и  $a_2$  — два приближенных значения корня уравнения  $f(x) = 0$ , тогда более точное значение

$$a_3 = a_1 + \frac{(a_2 - a_1)f(a_1)}{f(a_1) - f(a_2)}.$$

Комбинируя  $a_3$  с одним из значений  $a_1$  или  $a_2$ , можем вычислить еще более точное значение корня и т. д. Вместо  $a_1$  или  $a_2$  можно задаться каким-либо более близким к действительности значением  $a_4$ , руководствуясь вычисленной величиной  $a_3$ . Рекомендуется задаваться такими значениями  $a_1$  или  $a_2$ , при которых функция имеет противоположные знаки.

При вычислении корня полезно применять параллельно оба способа, т. е. *Ньютона* и *Regula falsi*.

## 1.21. Неравенства

Неравенство  $a < b$  равносильно каждому из следующих неравенств:

$$a \pm k < b \pm k; \quad am < bm \quad (\text{при } m > 0);$$

$$-a > -b; \quad \frac{1}{a} > \frac{1}{b} \quad (\text{при } a > 0).$$

Из неравенств  $a < b$ ,  $A < B$  следует:

$$a + A < b + B; \quad a - B < b - A;$$

$$aA < bB \quad (\text{при } a > 0 \text{ и } A > 0).$$

Неравенство  $|a| < b$  равносильно неравенствам

$$-b < a < b \quad \text{или} \quad a^2 < b^2 \quad (b > 0).$$

*Некоторые неравенства:*

$$\| |a| - |b| \| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|;$$

$$\left| \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right| \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}};$$

$$\sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} \quad (\text{при } a > 0, b > 0);$$

$$(1+a)^n > 1+na > na \quad (\text{при } a > 0).$$

## 2. ГЕОМЕТРИЯ

### 2.1. Стандартные геометрические обозначения

- $\perp$  перпендикулярно;  
 $\parallel$  параллельно;  
 $\#$  равно и параллельно;  
 $\sim$  подобно;  
 $\Delta$  треугольник, например  $\Delta ABC$ ;  
 $\angle$  плоский угол, например  $\angle ABC$  (можно применять более сложный знак  $\sphericalangle$  в тех случаях, когда могут возникнуть недоразумения);  
 $\frown$  или  $\smile$  дуга, например  $\frown AB$ ,  $\widehat{AB}$ ;  
 $^{\circ}$  градус;  
' минута;  
" секунда.

Примечание. Если обозначение  $^{\circ}$  (градус), ' $'$  (минута) или  $''$  (секунда) относится к числу, содержащему десятичную дробь, то оно ставится *над запятой*, например,  $57^{\circ},29578$ ;  $57^{\circ}17',75$ ;  $57^{\circ}17'44'',806$ .

### 2.2. Измерение углов

**1. Плоские углы.** Углы измеряются: 1) градусами, минутами и секундами и 2) угловыми единицами, или радианами. Радиан есть угол, дуга которого равна радиусу.

$$1 \text{ радиан} = \frac{180^{\circ}}{\pi} = 57^{\circ},295779513 = 57^{\circ}17'44'',806,$$

или приблизительно

$$1 \text{ радиан} \approx 57^{\circ}17\frac{3}{4}' \approx 57^{\circ},3.$$

$$\text{arc } 1^{\circ} = \frac{\pi}{180} = 0,01745329252; \quad \lg \text{arc } 1^{\circ} = 0,2418774 - 2;$$

$$\text{arc } 1' = \frac{\pi}{10800} = 0,00029088821; \quad \lg \text{arc } 1' = 0,4637261 - 4;$$

$$\text{arc } 1'' = \frac{\pi}{648000} = 0,00000484814; \quad \lg \text{arc } 1'' = 0,6855749 - 6.$$

**2. Телесные углы.** Для выражения величины телесного угла отвлеченным числом служит единица стерадиан — это есть телесный угол, имеющий вершину в центре сферы и вырезающий такую часть сферы, поверхность которой равна *квадрату* радиуса сферы.

## 2.3. Плоские фигуры

В нижеследующих формулах  $S$  — площадь фигуры.

### 2.3.1. Треугольник

#### 1. Прямоугольный треугольник (рис. 2.1)

Теорема Пифагора:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

$$S = \frac{ab}{2}; \quad h_c = \frac{ab}{c}; \quad R = \frac{c}{2}.$$

Радиус вписанного круга

$$r = \frac{a + b - c}{2}.$$

Если  $\angle A = 30^\circ$  ( $\angle B = 60^\circ$ ), то

$$a = \frac{c}{2} \quad \text{и} \quad b = 0,86603c.$$

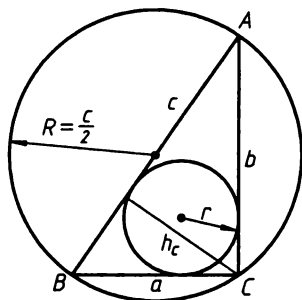


Рис. 2.1

Рациональные прямоугольные треугольники: оба катета и гипотенуза выражаются в целых числах ( $c^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$  — целое число). Применение: проверка прямых углов на постройках, при монтаже машин, трансмиссий и пр. Примеры в табл. 2.1.

Таблица 2.1

$a$	3	5	6	7	8	10	12	20
$b$	4	12	8	24	15	24	16	21
$c$	5	13	10	25	17	26	20	29

#### 2. Косоугольный треугольник (рис. 2.2)

$R$  — радиус описанного круга;  $r$  — радиус вписанного круга;  $2p$  — периметр;  $m_a, m_b, m_c$  — медианы.

$$h_a = \frac{bc}{2R}; \quad h_b = \frac{ac}{2R}; \quad h_c = \frac{ab}{2R};$$

$$R = \frac{abc}{4S}; \quad S = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2} =$$

$$= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} =$$

$$= \frac{1}{4} \sqrt{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2};$$

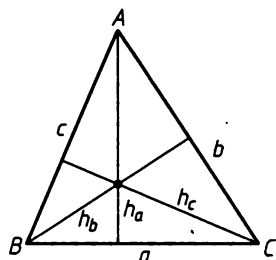


Рис. 2.2

$$r = \frac{2S}{a+b+c}; \quad S = rp; \quad m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Особые точки треугольника:

- 1) точка пересечения трех высот;
- 2) точка пересечения трех биссектрис (центр вписанного круга);
- 3) точка пересечения трех перпендикуляров через середины сторон (центр описанного круга);
- 4) точка пересечения трех медиан (центр тяжести площади треугольника); в этой точке каждая медиана делится на отрезки, относящиеся между собой как 1 : 2.

### 3. Правильный (равносторонний) треугольник (рис. 2.3)

$a$  — сторона;  $h$  — высота;  $R$  — радиус описанного круга;  $r$  — радиус вписанного круга.

$$a = R\sqrt{3} = 2r\sqrt{3} = \frac{2}{3}h\sqrt{3} \approx 1,519\sqrt{S};$$

$$h = \frac{1}{2}a\sqrt{3} = \frac{3}{2}R = 3r; \quad R = 2r = \frac{2}{3}h = \frac{1}{3}a\sqrt{3};$$

$$r = \frac{R}{2} = \frac{h}{3} = \frac{1}{6}a\sqrt{3}; \quad S = \frac{1}{4}a^2\sqrt{3} =$$

$$= \frac{1}{3}h^2\sqrt{3} = \frac{3}{4}R^2\sqrt{3} = 3r^2\sqrt{3}.$$

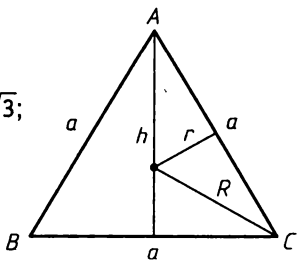


Рис. 2.3

#### 2.3.2. Четырехугольник

$D_1$  и  $D_2$  — диагонали;  $\varphi$  — угол между ними;  $p = \frac{a+b+c+d}{2}$  — полупериметр,  $m$  — линия, соединяющая середины диагоналей.

### 1. Общий случай (рис. 2.4):

$$S = \frac{1}{2} D_1 D_2 \sin \varphi = D_2 \frac{h'_2 + h''_2}{2}.$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = D_1^2 + D_2^2 + 4m^2.$$

Если четырехугольник вписан в круг, то

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

$$\text{и } ac + bd = D_1 D_2,$$

т. е. во всяком вписанном четырехугольнике произведение диагоналей равно сумме произведений противоположных сторон (теорема Птолемея).

Радиус описанного круга:

$$R = \frac{1}{4S} \sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}.$$

Диагональ вписанного четырехугольника (рис. 2.4):

$$D_1 = \sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{(ad+bc)}}.$$

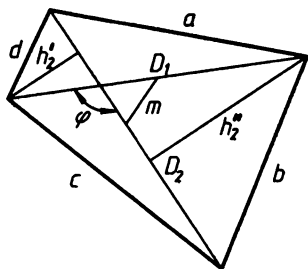


Рис. 2.4

### 2. Параллелограмм (рис. 2.5)

$$S = ah_a = abs \sin \gamma = \frac{1}{2} D_1 D_2 \sin \varphi;$$

$$2(a^2 + b^2) = D_1^2 + D_2^2;$$

$$D_{1,2} = \sqrt{a^2 + b^2 \pm 2a\sqrt{b^2 - h_a^2}}.$$

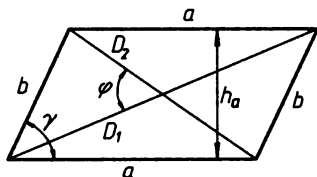


Рис. 2.5

### 3. Прямоугольник (рис. 2.6)

$$S = ab = \frac{1}{2} D^2 \sin \varphi; \quad D^2 = a^2 + b^2.$$

В случае квадрата ( $R$  — радиус описанного,  $r$  — радиус вписанного круга):

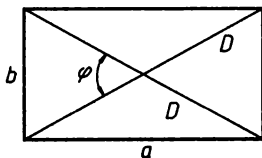


Рис. 2.6

$$a = b = R\sqrt{2} = 2r = \sqrt{S}; \quad D = a\sqrt{2} = 2R = 2r\sqrt{2}; \quad R = \frac{1}{2}a\sqrt{2} = r\sqrt{2};$$

$$r = \frac{a}{2} = \frac{1}{2}R\sqrt{2}; \quad S = a^2 = 2R^2 = 4r^2 = \frac{1}{2}D^2.$$

#### 4. Ромб (рис. 2.7)

$$S = ah = a^2 \sin \gamma = \frac{1}{2} D_1 D_2.$$

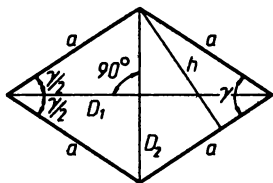


Рис. 2.7

#### 5. Трапеция (рис. 2.8)

$$S = \frac{a+b}{2} h = \frac{1}{2} D_1 D_2 \sin \varphi;$$

диагональ  $D_1$  между сторонами  $a$  и  $c$  и сторонами  $b$  и  $d$ :

$$D_1 = \sqrt{ab + \frac{ac^2 - bd^2}{a-b}}.$$

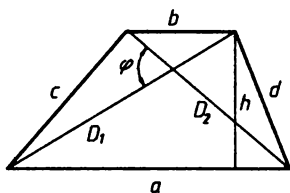


Рис. 2.8

$$h = \frac{1}{2(a-b)} \sqrt{(a-b+c+d)(a-b+c-d)(a-b-c+d)(-a+b+c+d)}.$$

#### 2.3.3. Скрещенный четырехугольник

Применение: линия влияния или инфлюентная линия.

Площади влияния (рис. 2.9):

$$S_1 = \frac{h}{2} \frac{a^2}{a+b};$$

$$S_2 = \frac{h}{2} \frac{b^2}{a+b};$$

$$S_2 - S_1 = \frac{h}{2} (b-a).$$

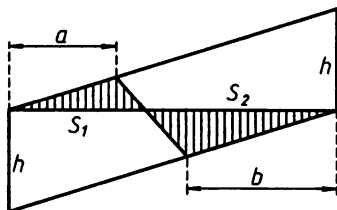


Рис. 2.9

#### 2.3.4. Специальные четырехугольники

##### 1. Нессимметричная трапеция с двумя прямыми углами (рис. 2.10)

Формулы для вычисления длины стержней и определения точек пересечения стержней в фермах:

$$x = \frac{Db}{b+c}; \quad D = \sqrt{a^2 + c^2};$$

$$y = \frac{dc}{c+b};$$

$$d = \sqrt{a^2 + b^2};$$

$$f = \sqrt{a^2 + (c-b)^2}.$$

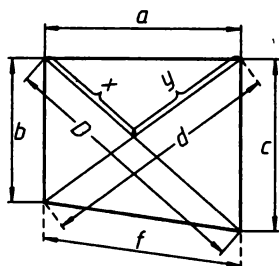


Рис. 2.10

## 2. Симметричная трапеция (рис. 2.11)

$$x = \frac{Dc}{c+b};$$

$$e = \sqrt{a^2 + h^2};$$

$$D = \sqrt{h^2 + (a+b)^2}.$$

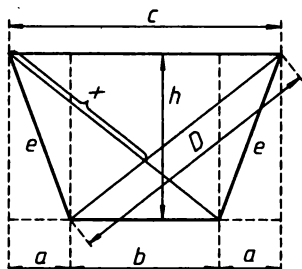


Рис. 2.11

## 3. Четырехугольник с одним прямым углом (рис. 2.12)

$$x = \frac{Dah_1}{ah_2 + bh_1}; \quad c = \sqrt{b^2 + (h_2 - h_1)^2};$$

$$y = \frac{dah_2}{ah_2 + bh_1}; \quad e = \sqrt{h_2^2 + (b-a)^2};$$

$$D = \sqrt{h_2^2 + b^2}; \quad d = \sqrt{a^2 + h_1^2}.$$

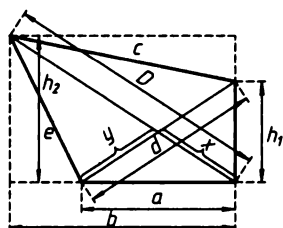


Рис. 2.12

## 4. Произвольный четырехугольник (рис. 2.13)

$$x = \frac{Dbh_1}{(b+a)h_1 + (b+c)h_2};$$

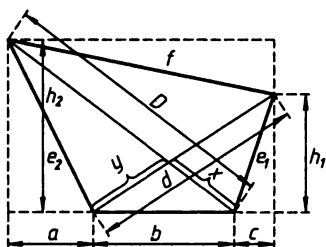
$$e_1 = \sqrt{h_1^2 + c^2}; \quad e_2 = \sqrt{h_2^2 + a^2};$$

$$y = \frac{dbh_2}{(b+a)h_1 + (b+c)h_2};$$

$$D = \sqrt{h_2^2 + (a + b)^2};$$

$$f = \sqrt{(a + b + c)^2 + (h_2 - h_1)^2};$$

$$d = \sqrt{h_1^2 + (b + c)^2}.$$



**Рис. 2.13**

## 5. Решетчатая стойка

Если раскосы решетчатой стойки (рис. 2.14) должны быть взаимно параллельны, то расстояния между ригелями  $l, l_1, l_2, \dots, l_n$  различны.

При числе панелей, равном  $n$ :  
длина ригеля

$$l_{n-1} = \sqrt[n]{ll_n^{n-1}},$$

**соответствующая длина стойки**

$$h_{n-1} = \frac{l - l_{n-1}}{2 \operatorname{tg} \alpha}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{l - l_n}{2 h_n}.$$

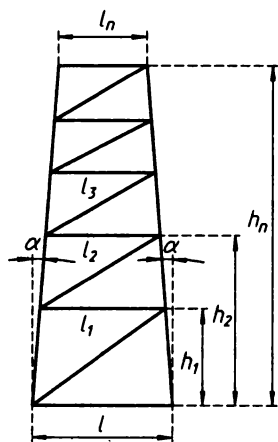


Рис. 2.14

**Пример.**

$$l = 9,00 \text{ м}, l_s = 5,00 \text{ м},$$

$$h_s = 15,00 \text{ м.}$$

Число панелей  $n = 5$ , следовательно,

$$l_n = l_5 \text{ и } h_n = h_5, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{9-5}{2.15} = 0,13333.$$

$$l_4 = \sqrt[5]{9 \cdot 5^4} = 5,604 \text{ м}; \quad l_3 = \sqrt[4]{9 \cdot 5,604^3} = 6,308 \text{ м};$$

$$l_2 = \sqrt[3]{9 \cdot 6,308^2} = 7,101 \text{ м}; \quad l_1 = \sqrt{9 \cdot 7,101} = 7,998 \text{ м}.$$

$$h_4 = \frac{9 - 5,604}{2 \cdot 0,13333} = 12,738 \text{ м}; \quad h_3 = \frac{9 - 6,308}{2 \cdot 0,13333} = 10,120 \text{ м};$$

$$h_2 = \frac{9 - 7,101}{2 \cdot 0,13333} = 7,139 \text{ м}; \quad h_1 = \frac{9 - 7,998}{2 \cdot 0,13333} = 3,767 \text{ м}.$$

### 2.3.5. Шестиугольник

**Правильный шестиугольник** (рис. 2.15)

$$a = R = \frac{D}{2} = \frac{2}{3}r\sqrt{3} = \frac{1}{3}d\sqrt{3}.$$

$$r = \frac{1}{2}a\sqrt{3} = \frac{1}{2}R\sqrt{3};$$

$$d = a\sqrt{3} = R\sqrt{3}.$$

$$S = \frac{3}{2}a^2\sqrt{3} = \frac{3}{2}R^2\sqrt{3} =$$

$$= 2r^2\sqrt{3} = 0,866d^2.$$

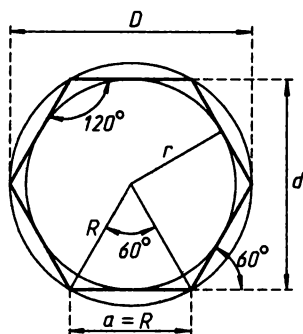


Рис. 2.15

### 2.3.6. Правильные многоугольники

$a$  — сторона;  $n$  — число сторон;  $2p$  — периметр  $= na$ ;  $S$  — площадь;  $R$  — радиус описанного круга;  $D$  — диаметр описанного круга;  $r$  — радиус вписанного круга;  $d$  — диаметр вписанного круга (рис. 2.16).

#### Общие формулы

Центральный угол

$$\varphi = \frac{360^\circ}{n}; \quad \varphi_1 = 180^\circ - \varphi;$$

$$a = 2R \sin \frac{180^\circ}{n} = 2r \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n} = 2\sqrt{R^2 - r^2};$$

$$R = \frac{a}{2} : \sin \frac{180^\circ}{n} = r : \cos \frac{180^\circ}{n};$$

$$r = R \cos \frac{180^\circ}{n} = \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{n};$$

$$S = n \frac{ar}{2} = n \frac{a^2}{4} \operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{n} = n \frac{R^2}{2} \sin \frac{360^\circ}{n} = n \frac{D^2}{8} \sin \frac{360^\circ}{n} =$$

$$= nr^2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n} = n \frac{d^2}{4} \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}.$$

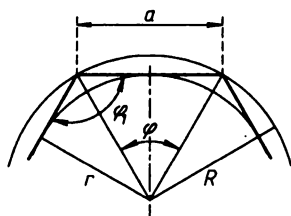


Рис. 2.16

По этим формулам составлена табл. 2.2.

Таблица 2.2

Правильные многоугольники.  
Данные для определения  $S$ ,  $R$ ,  $a$  и  $r$

$n$	$\frac{S}{a^2}$	$\frac{S}{R^2}$	$\frac{S}{r^2}$	$\frac{R}{a}$	$\frac{R}{r}$	$\frac{a}{R}$	$\frac{a}{r}$	$\frac{r}{R}$	$\frac{r}{a}$	$\Phi$
3	0,4330	1,2990	5,1962	0,5774	2,0000	1,7321	3,4641	0,5000	0,2887	120°
4	1,0000	2,0000	4,0000	0,7071	1,4142	1,4142	2,0000	0,7071	0,5000	90°
5	1,7205	2,3776	3,6327	0,8507	1,2361	1,1756	1,4531	0,8090	0,6882	72°
6	2,5981	2,5981	3,4641	1,0000	1,1547	1,0000	1,1547	0,8660	0,8660	60°
7	3,6339	2,7364	3,3710	1,1524	1,1099	0,8678	0,9631	0,9010	1,0383	51°25',7
8	4,8284	2,8284	3,3137	1,3066	1,0824	0,7654	0,8284	0,9239	1,2071	45°
9	6,1818	2,8925	3,2757	1,4619	1,0642	0,6840	0,7279	0,9397	1,3737	40°
10	7,6942	2,9389	3,2492	1,6180	1,0515	0,6180	0,6498	0,9511	1,5388	36°
12	11,196	3,0000	3,2154	1,9319	1,0353	0,5176	0,5359	0,9659	1,8660	30°
15	17,642	3,0505	3,1883	2,4049	1,0223	0,4158	0,4251	0,9781	2,3523	24°
16	20,109	3,0615	3,1826	2,5529	1,0196	0,3902	0,3978	0,9808	2,5137	22°30'
20	31,569	3,0902	3,1677	3,1967	1,0125	0,3129	0,3168	0,9877	3,1569	18°
24	45,575	3,1058	3,1597	3,8306	1,0086	0,2611	0,2633	0,9914	3,7979	15°
32	81,225	3,1214	3,1517	5,1011	1,0048	0,1960	0,1970	0,9952	5,0766	11°15'
48	183,08	3,1316	3,1461	7,6449	1,0021	0,1308	0,1311	0,9979	7,6285	7°30'
64	325,69	3,1365	3,1441	10,190	1,0012	0,0981	0,0983	0,9988	10,178	5°37',5

Таблица 2.3

Деление окружности на  $n$  равных частей

Если  $D$  — диаметр окружности, то откладываемый отрезок = хорде =  $D \cdot \sin \frac{180^\circ}{n}$

$n$	$\sin \frac{180^\circ}{n}$	$n$	$\sin \frac{180^\circ}{n}$	$n$	$\sin \frac{180^\circ}{n}$	$n$	$\sin \frac{180^\circ}{n}$	$n$	$\sin \frac{180^\circ}{n}$
1	0,00000	12	0,25882	23	0,13617	34	0,09227	45	0,06976
2	1,00000	13	0,23932	24	0,13053	35	0,08964	46	0,06824
3	0,86603	14	0,22252	25	0,12533	36	0,08716	47	0,06679
4	0,70711	15	0,20791	26	0,12054	37	0,08481	48	0,06540
5	0,58779	16	0,19509	27	0,11609	38	0,08258	49	0,06407
6	0,50000	17	0,18375	28	0,11196	39	0,08047	50	0,06279
7	0,43388	18	0,17365	29	0,10812	40	0,07846	51	0,06156
8	0,38268	19	0,16460	30	0,10453	41	0,07655	52	0,06038
9	0,34202	20	0,15643	31	0,10117	42	0,07473	53	0,05924
10	0,30902	21	0,14904	32	0,09802	43	0,07300	54	0,05814
11	0,28173	22	0,14232	33	0,09506	44	0,07134	55	0,05709

$n$	$\sin \frac{180^\circ}{n}$	$n$	$\sin \frac{180^\circ}{n}$	$n$	$\sin \frac{180^\circ}{n}$	$n$	$\sin \frac{180^\circ}{n}$	$n$	$\sin \frac{180^\circ}{n}$
56	0,05607	65	0,04831	74	0,04244	83	0,03784	92	0,03414
57	0,05509	66	0,04758	75	0,04188	84	0,03739	93	0,03377
58	0,05414	67	0,04687	76	0,04132	85	0,03695	94	0,03341
59	0,05322	68	0,04618	77	0,04079	86	0,03652	95	0,03306
60	0,05234	69	0,04551	78	0,04027	87	0,03610	96	0,03272
61	0,05148	70	0,04487	79	0,03976	88	0,03568	97	0,03238
62	0,05065	71	0,04423	80	0,03926	89	0,03529	98	0,03205
63	0,04985	72	0,04362	81	0,03878	90	0,03490	99	0,03173
64	0,04907	73	0,04302	82	0,03830	91	0,03452	100	0,03141

**Пример.** Разделить на 47 равных частей окружность круга, диаметр которого = 375 мм. Для деления надо откладывать по окружности циркулем отрезок =  $375 \cdot 0,06679 = 25,046$  мм.

### 2.3.7. Круг

#### 1. Площадь круга (рис. 2.17)

$$S = \pi r^2 = \frac{\pi d^2}{4}.$$

#### 2. Окружность круга

$$U = 2\pi r = \pi d.$$

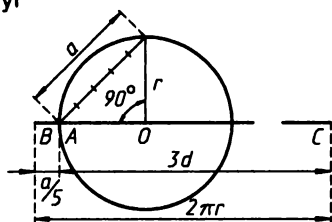


Рис. 2.17

Длина выпрямленной окружности приблизительно равна утроенному диаметру плюс одна пятая стороны вписанного квадрата (рис. 2.17)  $= 3d + \frac{d}{10}\sqrt{2} = 3,14142d$  (ошибка менее 1 : 5000).

$$\pi = 3,14159265359...$$

Другой способ (рис. 2.18) дает длину выпрямленной полуокружности ( $\pi r$ ).

Он основан на построении прямоугольного треугольника с углом  $AOB = 30^\circ$ ; в таком треугольнике катет  $AB$  равен половине гипотенузы.

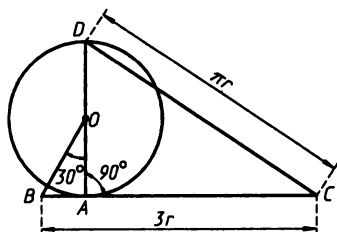


Рис. 2.18

### 3. Диаметр круга

$$d = \sqrt{\frac{4S}{\pi}} = 1,12838\sqrt{S}; \quad d = \frac{U}{\pi} = 0,318309886U.$$

#### 2.3.8. Кольцо

**Площадь кольца** (рис. 2.19):

$$S = \pi(R^2 - r^2) = \frac{\pi(D^2 - d^2)}{4} =$$

$$= \frac{\pi D^2}{4}(1 - \alpha^2); \quad \alpha = \frac{d}{D}$$

или

$$S = 2\pi R_m \delta = \pi D_m \delta,$$

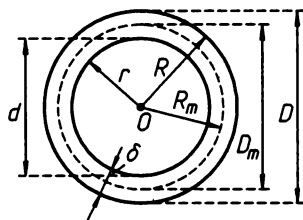


Рис. 2.19

где  $\delta$  — ширина кольца;  $R_m$  — средний радиус  $= \frac{R+r}{2} = r + \frac{\delta}{2} = R - \frac{\delta}{2}$ ;  
 $D_m$  — средний диаметр  $= \frac{D+d}{2} = d + \delta = D - \delta$ .

#### 2.3.9. Дуга круга

**1. Длина дуги** (рис. 2.20):

$$s = \beta r = \frac{\pi r \beta^\circ}{180} = 0,01745329r \beta^\circ,$$

где  $\beta$  — центральный угол в радианах;  $\beta^\circ$  — центральный угол в градусах.

$$\beta^\circ = \frac{180}{\pi} \frac{s}{r} = \frac{180}{\pi} \beta = 57,2957795\beta \approx 57,3\beta.$$

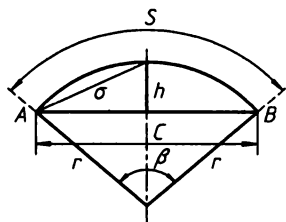


Рис. 2.20

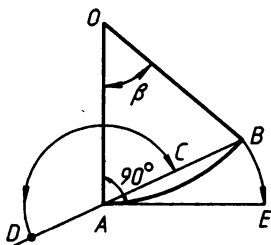
Формула Гюйгенса дает приближительную длину дуги круга (рис. 2.20):

$$s = 2\sigma + \frac{2\sigma - c}{3} = \frac{8\sigma - c}{3},$$

где  $c$  — длина хорды дуги;  $\sigma$  — длина хорды половинной дуги.

Для угла  $30^\circ$  ошибка  $< 1: 100000$ ;  
для угла  $45^\circ$  ошибка  $< 1: 20000$ ;  
для угла  $60^\circ$  ошибка  $< 1: 6000$ .

Чтобы найти длину дуги любой непрерывной кривой, делят ее на четное число дуг, принимая эти дуги за круговые (см. также «Парабола»).



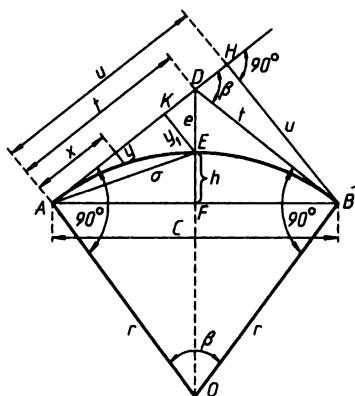
**Рис. 2.21**

Графический способ спрямления дуг (рис. 2.21). Угол  $\angle OAE = 90^\circ$ , точка  $C$  — середина хорды  $AB$ ;  $AD = AC$ ; дуга  $BE$  описана из центра  $D$  радиусом  $DB$ . Отрезок  $AE$  дает приблизительную длину дуги  $AB$ . Если  $\angle \beta > 60^\circ$ , то дугу  $AB$  делят на несколько равных дуг и производят указанное построение.

**2. Стрелка сегмента (рис. 2.22):**

$$h = r \left( 1 - \cos \frac{\beta}{2} \right) = r - \sqrt{r^2 - \frac{c^2}{4}} = \frac{\sigma^2}{2r} = r \sin \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{4} = \frac{c}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{4}.$$

Для пологих дуг прибли-  
тельно  $h = \frac{c^2}{8r}$ .



**Рис. 2.22**

### 3. Хорда (рис. 2.22):

$$\begin{aligned} c &= 2r \sin \frac{\beta}{2} = 2t \cos \frac{\beta}{2} = \\ &= 2\sqrt{h(2r-h)} = \sqrt{2ru} = \\ &= \sqrt{u^2 + v^2} = \sqrt{2r(r - \sqrt{r^2 - u^2})} = \frac{r^2}{r-h} \sin \beta. \end{aligned}$$

#### 4. Хорда половинной дуги (рис. 2.22):

$$\sigma = \sqrt{2rh} = \sqrt{r(2r - \sqrt{4r^2 - c^2})} = 2r \sin \frac{\beta}{4}.$$

### 5. Другие элементы (рис. 2.22):

**Длина касательной:**

$$t = r \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}.$$

**Внешняя стрелка:**

$$e = ED = r \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{4} = t \operatorname{tg} \frac{\beta}{4}.$$

**Ордината середины дуги:**

$$y_1 = EK = h$$

(формулы, определяющие  $h$ , даны выше).

**Координаты конца дуги:**

$$u = AH = \sqrt{v(2r - v)} = \frac{c}{2r} \sqrt{4r^2 - c^2} = r \sin \beta = v \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} = \frac{c}{r} (r - h).$$

$$v = BH = \frac{c^2}{2r} r - \sqrt{r^2 - u^2} = 2r \sin^2 \frac{\beta}{2} = r \sin \beta \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = u \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = t \sin \beta.$$

**Ордината любой точки дуги:**

$$y = r - \sqrt{r^2 - x^2}.$$

**Радиус дуги:**

$$r = \frac{s}{\beta} = \frac{c^2 + 4h^2}{8h} = \frac{c^2}{2s} = \frac{\sigma^2}{2h} = \frac{u^2 + v^2}{2s}.$$

### 2.3.10. Круговой сегмент

**Площадь сегмента** (рис. 2.23):

$$\begin{aligned} S &= \frac{br}{2} - \frac{c(r-h)}{2} = \\ &= \frac{br}{2} - \frac{r^2 \sin \beta}{2} = \frac{r^2}{2} \left( \frac{\pi \beta^\circ}{180} - \sin \beta \right) \end{aligned}$$

или, также

$$S = \frac{br}{2} - \frac{ru}{2} = \frac{r}{2} (b - u),$$

где  $u = AH$  (см. рис. 2.22).

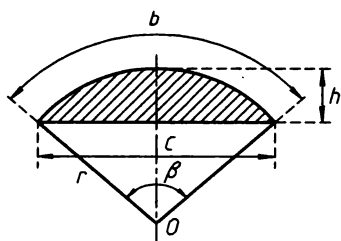


Рис. 2.23

Приблизительно для любого пологого сегмента:

$$S = \frac{2}{3} hc + \frac{h^3}{2c} \approx \frac{2}{3} hc.$$

### 2.3.11. Круговой сектор

**Площадь сектора** (рис. 2.24):

$$S = \frac{br}{2} = \frac{\beta r^2}{2} =$$

$$= \frac{\pi r^2}{2} \frac{\beta^\circ}{180} = 0,0087266 r^2 \beta^\circ.$$

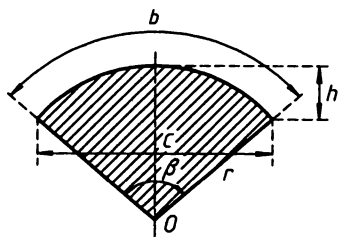


Рис. 2.24

### 2.3.12. Отрезок кольца

**Площадь** (рис. 2.25):

$$S = \frac{\beta(R^2 - r^2)}{2} =$$

$$= \frac{\pi(R^2 - r^2)}{2} \frac{\beta^\circ}{180} =$$

$$= 0,0087266(R^2 - r^2) \beta^\circ$$

или

$$S = \beta \rho \delta = \frac{\pi \beta^\circ}{180} \rho \delta = 0,01745329 \beta^\circ \rho \delta.$$

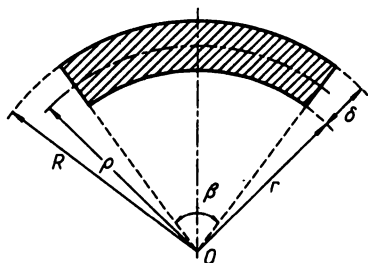


Рис. 2.25

### 2.3.13. Эллипс

**1. Площадь:**

$$S = \pi ab,$$

где  $a$  и  $b$  — полуоси.

**2. Окружность эллипса:**

$$U = \pi(a+b) \left[ 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{a-b}{a+b} \right)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{64} \left( \frac{a-b}{a+b} \right)^4 + \frac{1}{256} \left( \frac{a-b}{a+b} \right)^6 + \dots \right] \approx 2a\psi.$$

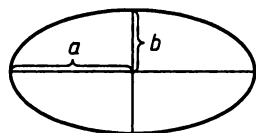


Рис. 2.26

В табл. 2.4 даны значения коэффициента  $\psi$ .

Таблица 2.4

Значения коэффициента  $\psi$  для эллипса

$b/a$	$\psi$	$b/a$	$\psi$	$b/a$	$\psi$	$b/a$	$\psi$	$b/a$	$\psi$	$b/a$	$\psi$
0,10	2,032	0,34	2,230	0,46	2,373	0,60	2,553	0,74	2,748	0,86	2,926
0,20	2,102	0,35	2,247	0,48	2,398	0,62	2,580	0,75	2,763	0,88	2,956
0,22	2,120	0,36	2,258	0,50	2,423	0,64	2,607	0,76	2,778	0,90	2,986
0,24	2,138	0,38	2,280	0,52	2,448	0,65	2,621	0,78	2,807	0,92	3,017
0,25	2,147	0,40	2,302	0,54	2,474	0,66	2,635	0,80	2,836	0,94	3,048
0,26	2,156	0,42	2,325	0,55	2,487	0,68	2,663	0,82	2,865	0,95	3,063
0,28	2,175	0,44	2,349	0,56	2,500	0,70	2,691	0,84	2,895	0,96	3,079
0,30	2,195	0,45	2,361	0,58	2,527	0,72	2,719	0,85	2,910	0,98	3,110
0,32	2,215										

## 2.3.14. Парабола

**Дуга**

Длина пологой дуги параболы и всякой вообще пологой кривой  $DOB$  с хордой  $c$  и стрелкой  $h$  (рис. 2.27):

$$b \approx c \left[ 1 + \frac{8}{3} \left( \frac{h}{c} \right)^2 - \frac{32}{5} \left( \frac{h}{c} \right)^4 \right]$$

$$\text{или } b \approx c \left[ 1 + \frac{8}{3} \left( \frac{h}{c} \right)^2 \right].$$

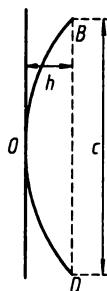


Рис. 2.27

Последняя формула применима при  $h < 0,4c$ .

Площадь параболического сегмента  $BOD$  (рис. 2.28):

$$S = \frac{2}{3}ch.$$

Площадь какого-либо пологого сегмента с хордой  $c$  и стрелкой  $h$

$$S \approx \frac{2}{3}ch.$$

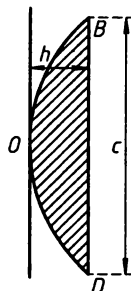


Рис. 2.28

## 2.3.15. Неправильные фигуры

### 1. Правило трапеций

Для вычисления площади диаграммы, показанной на рис. 2.29, делим абсциссу  $b$  на  $n$  равных частей, в точках деления проводим ординаты  $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ , кроме того, проводим ординаты  $y_0$  и  $y_n$  в расстоянии  $\frac{a}{4}$  от концов диаграммы, тогда получим:  $(n-1)$  трапецию с высотой  $a = \frac{b}{n}$  и средними линиями

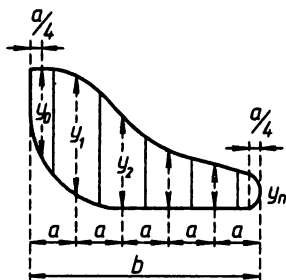


Рис. 2.29

$y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$  и 2 трапеции с высотой  $\frac{a}{2}$  и средними линиями  $y_0$  и  $y_n$ , следовательно, площадь всей фигуры:

$$S = a \left( \frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2} \right) =$$

$$= \frac{b}{n} \left( \frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + y_3 + \dots + \frac{y_n}{2} \right).$$

*Средняя ордината диаграммы:*

$$y_c = \frac{1}{n} \left( \frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \dots + \frac{y_n}{2} \right).$$

### 2. Правило Симпсона (рис. 2.30)

Делим абсциссу на четное число  $(2n)$  равных частей, строим и измеряем ординаты  $y_0, y_1, y_2, \dots, y_{2n}$ ; тогда

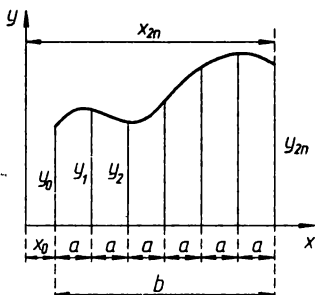


Рис. 2.30

$$S = \int_{x_0}^{x_{2n}} y \, dx =$$

$$= \frac{a}{3} [y_0 + y_{2n} + 4(y_1 + y_2 + \dots + y_{2n-1}) +$$

$$+ 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2n-2})].$$

Если  $y$  — целая функция  $x$  не выше 3-й степени, то достаточно измерить среднюю и крайние ординаты (рис. 2.31); тогда

$$S = \frac{b}{6} (y_0 + 4y_m + y_1).$$

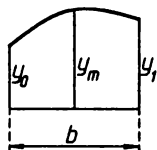


Рис. 2.31

### 3. Правило Чебышева (рис. 2.32)

Через середину основания  $b$  проводим ординату  $CD$ ; по обе стороны ее проводим ординаты  $h_1, h_6; h_2, h_5; h_3, h_4$  в расстояниях от  $CD$ :

$$b_1 = 0,866a, \quad b_2 = 0,422a,$$

$$b_3 = 0,267a,$$

измеряем эти 6 ординат, тогда

$$S = \frac{a}{3} (h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + h_5 + h_6) = \frac{b}{6} (h_1 + \dots + h_6).$$

Эта формула дает весьма точные результаты.

Если кривая симметрична относительно  $CD$ , то

$$S = \frac{2}{3}a (h_1 + h_2 + h_3) = \frac{1}{3}b (h_1 + h_2 + h_3).$$

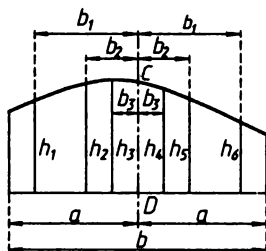


Рис. 2.32

## 2.4. Геометрические тела

$V$  — объем;  $M$  — боковая поверхность;  $A$  — полная поверхность тела;  $S$  — площадь основания. Если основание правильный многоугольник, то  $S$  определяется как указано в п. 2.3.6.

### 2.4.1. Призма

#### 1. Общие формулы для прямой призмы (рис. 2.33):

$$M = U \cdot h,$$

где  $U$  — периметр основания,

$$A = Uh + 2S, \quad V = Sh;$$

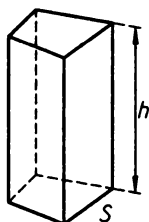


Рис. 2.33

**2. Общие формулы для наклонной призмы с параллельными основаниями (рис. 2.34):**

$$V = N \cdot l,$$

где  $N$  — площадь нормального к ребрам сечения и  $l$  — длина ребра.

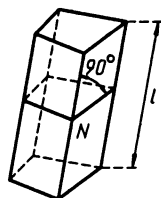


Рис. 2.34

**3. Прямоугольный параллелепипед (рис. 2.35):**

$$M = 2(a + b)c, \quad A = 2(ab + ac + bc),$$

$$V = abc,$$

диагональ  $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ .

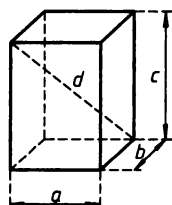


Рис. 2.35

**4. Шестиугольная прямая призма (рис. 2.36, основания — правильные шестиугольники со стороной  $a$ ):**

$$M = 6ah,$$

$$A = 6ah + 2 \cdot \frac{3}{2} a^2 \sqrt{3} = 6ah + 5,1963 a^2,$$

$$V = \frac{3}{2} a^2 \sqrt{3} h = 2,598 a^2 h.$$

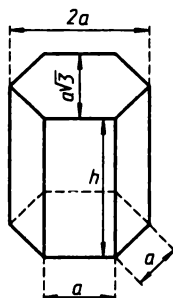


Рис. 2.36

**5. Треугольная усеченная призма (рис. 2.37):**

$$V = N \frac{a+b+c}{3},$$

где  $N$  — площадь нормального к ребрам сечения.

В случае **многоугольной усеченной призмы** объем равен сумме объемов составляющих треугольных призм, или  $V = N \cdot l$ , где  $N$  — площадь нормального к ребрам

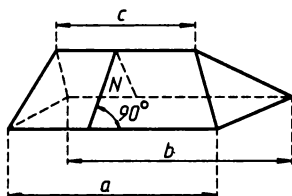


Рис. 2.37

сечения и  $l$  — длина прямой, соединяющей центры тяжести оснований. Например, в случае усеченного параллелепипеда с ребрами  $a, b, c, d$  имеем

$$l = \frac{a+c}{2} = \frac{b+d}{2},$$

следовательно,

$$V = N \frac{a+c}{2} = N \frac{b+d}{2},$$

где  $a$  и  $c$  (или  $b$  и  $d$ ) — противоположные ребра.

### 2.4.2. Пирамида

$M$  равна сумме площадей ограничивающих треугольников (рис. 2.38).

$$V = \frac{1}{3}Sh.$$

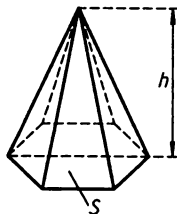


Рис. 2.38

### 2.4.3. Усеченная пирамида

Если  $S$  и  $s$  — площади оснований (рис. 2.39), то

$$V = \frac{1}{3}h(S + \sqrt{Ss} + s).$$

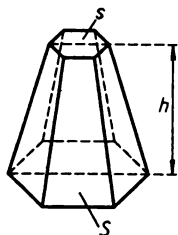


Рис. 2.39

### 2.4.4. Обелиск, понтон, усеченный клин (с прямоугольным основанием)

$$V = \frac{h}{6} [(2a + a_1)b + (2a_1 + a)b_1].$$

Приблизительно для обелиска

$$V = \frac{a+a_1}{2} \cdot \frac{b+b_1}{2} \cdot h.$$

В случае клина  $b_1 = 0$  и, следовательно,

$$V = \frac{bh}{6}(2a + a_1).$$

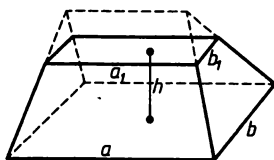


Рис. 2.40

## 2.4.5. Призмовид

**Призмовид** — тело, ограниченное двумя параллельными основаниями и произвольным числом боковых граней плоских или косых (рис. 2.41).

По формуле Симпсона

$$V = \frac{h}{6}(S_1 + 4S_m + S_2),$$

где  $S_1$  и  $S_2$  — площади нижнего и верхнего оснований и  $S_m$  — площадь среднего сечения.

Частные случаи призмоида: призма, пирамида,obelisk, клин и пр.

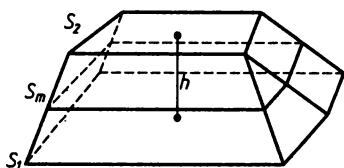


Рис. 2.41

## 2.4.6. Многогранники

### Общие свойства многогранников

1. Теорема Эйлера: во всяком многограннике сумма чисел вершин ( $N_v$ ) и граней ( $N_p$ ) на два больше числа ребер ( $N_r$ ), т. е.

$$N_v + N_p = N_r + 2.$$

Если все грани треугольники, то  $3N_p = 2N_r$  и, следовательно,

$$3N_v - N_r = 6$$

(применение — в пространственных фермах).

2. Во всяком выпуклом многограннике число ребер вдвое меньше числа плоских углов ( $N_u$ ), т. е.  $2N_r = N_u$ .

3. Всякий многогранник должен иметь треугольные грани или трехгранные углы.

4. Невозможен многогранник, все грани которого являются многоугольниками, имеющими число сторон, большее пяти.

5. Невозможен многогранник, все телесные углы которого имеют число ребер большее пяти.

## 2.4.7. Цилиндр

1. **Прямой цилиндр** (рис. 2.42):

$$M = 2\pi r h = \pi d h, \quad A = 2\pi r(r + h),$$

$$V = \frac{2\pi d^2}{4} h = \pi r^2 h.$$

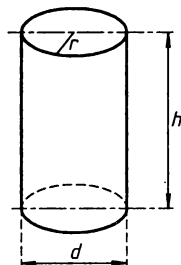


Рис. 2.42

**2. Наклонный цилиндр с параллельными основаниями (рис. 2.43):**

$$V = N \cdot l,$$

где  $N$  — площадь сечения, нормального к образующей и  $l$  — длина образующей.

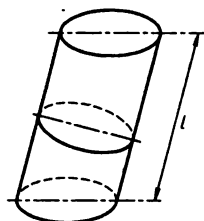


Рис. 2.43

**3. Усеченный цилиндр (рис. 2.44):**

$$M = \pi d \frac{h_{\max} + h_{\min}}{2} = \pi d h,$$

$$V = \frac{\pi d^2}{4} \frac{h_{\max} + h_{\min}}{2} = \frac{\pi d^2}{4} h,$$

$$D = \sqrt{4r^2 + (h_{\max} - h_{\min})^2}.$$

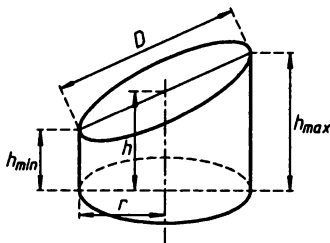


Рис. 2.44

**2.4.8. Полный цилиндр (труба)**

$$V = \pi (R^2 - r^2) h = \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) h = \pi D_m \delta h,$$

где  $D_m$  — средний диаметр;  $\delta$  — толщина стенки (см. также рис. 2.19).

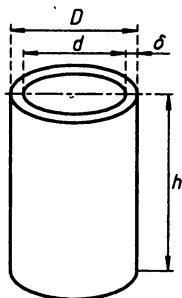


Рис. 2.45

**2.4.9. Цилиндрический клин**

$\angle 2\varphi$  — в радианах;  $AC = 2a$ ,  $BE = b$ ,  $h$  — наибольшая высота клина (рис. 2.46).

$$M = \frac{2rh}{b} [(b-r)\varphi + a];$$

$$V = \frac{h}{3b} [a(3r^2 - a^2) + 3r^2(b-r)\varphi].$$

Если  $\varphi^\circ$  — угол в градусах, то

$$\varphi = \frac{\pi\varphi^\circ}{180} = 0,0174533\varphi^\circ \text{ в радианах.}$$

При  $2\varphi = \pi$ , хорда  $2a=2r$ ,  $b=r$ ,

$$M=2rh \text{ и } V=\frac{2}{3}r^2h.$$

При  $2\varphi = 2\pi$ , хорда  $2a=0$ ,  $b=2r$ ,

$$M=\pi rh \text{ и } V=\frac{1}{2}\pi r^2h.$$

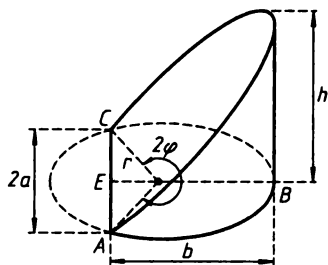


Рис. 2.46

#### 2.4.10. Конус

Для прямого кругового конуса (рис. 2.47):

$$M = \pi r l = \frac{1}{2} \pi d l = \pi r \sqrt{r^2 + h^2};$$

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \frac{\pi d^2}{4} h =$$

$$= 1,0472 r^2 h = 0,2618 d^2 h.$$

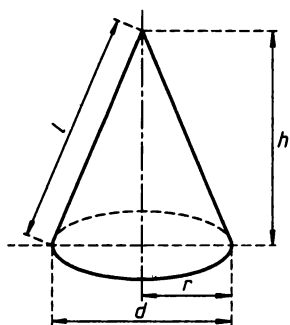


Рис. 2.47

#### 2.4.11. Усеченный конус

Для прямого усеченного конуса (рис. 2.48):

$$M = \pi (R + r) s = \frac{\pi (D + d)}{2} s;$$

$$V = \frac{\pi h}{3} (R^2 + Rr + r^2) =$$

$$= \frac{\pi h}{12} (D^2 + Dd + d^2).$$

Развертка усеченного конуса (рис. 2.49):

$$x = \frac{dh}{D - d},$$

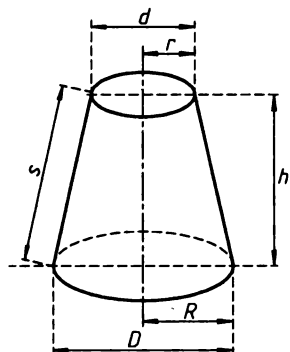


Рис. 2.48

$$l = s + \frac{ds}{D-d},$$

центральный угол

$$\beta^\circ = \frac{180^\circ D}{l} = \frac{180^\circ (D-d)}{s}.$$

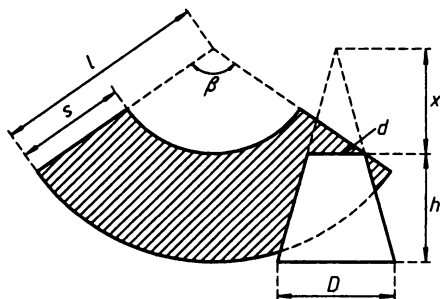


Рис. 2.49

### 2.4.12. Шар

$$A = 4\pi R^2 = \pi D^2 = 12,56637 R^2,$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{6}\pi D^3 = \frac{1}{6}DA =$$

$$= 4,1887902 R^3 = 0,5235988 D^3,$$

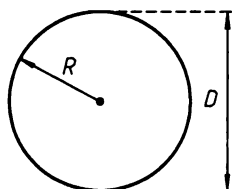


Рис. 2.50

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{A}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} = 0,282095\sqrt{A} = 0,620351\sqrt[3]{V}.$$

### 2.4.13. Пустотелый шар

Объем пустотелого шара вычисляется по формулам (рис. 2.51):

$$V = \frac{4}{3}\pi (R^3 - r^3) = \frac{1}{6}\pi (D^3 - d^3).$$

При весьма тонкой стенке, имеющей толщину  $\delta$ , можно пользоваться приближенными формулами:

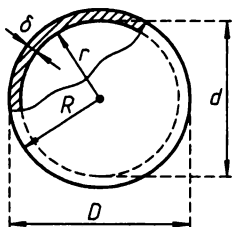


Рис. 2.51

$$V = 4\pi R_m^2 \delta = \pi D_m^2 \delta,$$

где  $R_m$  — средний радиус и  $D_m$  — средний диаметр сферической стенки.

## 2.4.14. Части шара

### 1. Сферический сегмент (рис. 2.52)

$a$  — радиус основания сегмента;  
 $R$  — радиус шара.

$$M = 2\pi R h = \pi(a^2 + h^2), \quad a^2 = h(2R - h),$$

$$V = \frac{\pi h}{6}(3a^2 + h^2) = \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3}\right).$$

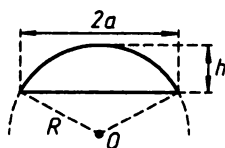


Рис. 2.52

### 2. Сферический сектор (рис. 2.53)

$2a$  — диаметр основания сегмента;  
 $R$  — радиус шара.

Полная поверхность

$$A = \pi R(2h + a),$$

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h = 2,0943951 R^2 h.$$

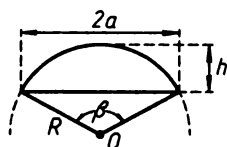


Рис. 2.53

### 3. Сферический слой (рис. 2.54)

$a$  и  $b$  — радиусы оснований;  $R$  — радиус шара.

$$M = 2\pi R h,$$

$$V = \frac{\pi h}{6}(3a^2 + 3b^2 + h^2).$$

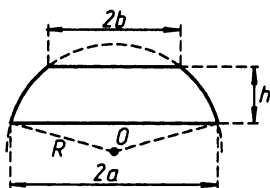


Рис. 2.54

### 4. Сферический клин (рис. 2.55)

$$a = R\beta.$$

$$M = 4\pi R^2 \frac{\beta}{2\pi} = 2R^2 \beta = 2Ra =$$

$$= \frac{\pi}{90} R \beta^\circ = 0,0349066 R^2 \beta^\circ,$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \frac{\beta}{2\pi} = \frac{2}{3} R^3 \beta = \frac{2}{3} R^2 a = \frac{1}{3} MR = 0,0116355 R^3 \beta^\circ.$$

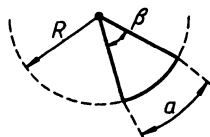


Рис. 2.55

## 2.4.15. Эллипсоид

Если  $a, b, c$  — полуоси (рис. 2.56), то

$$V = \frac{4}{3} \pi abc = 4,1887902abc.$$

В случае эллипсоида вращения

$$V = \frac{4}{3} \pi ab^2 = 4,1887902ab^2,$$

при условии, что  $2a$  — ось вращения (в этом случае  $c = b$ ).

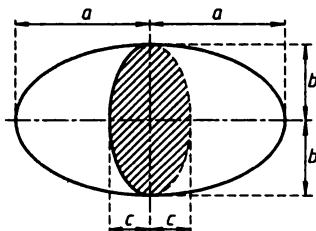


Рис. 2.56

## 2.4.16. Параболоид вращения

Если  $r$  — радиус основания и  $h$  — высота параболоида (рис. 2.57), то

$$V = \frac{1}{2} \pi r^2 h = 1,570796 r^2 h.$$

Параболоид, усеченный двумя параллельными основаниями перпендикулярными к оси (рис. 2.58):

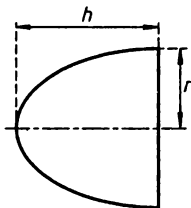


Рис. 2.57

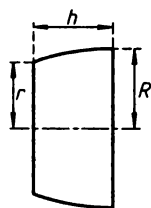


Рис. 2.58

$$V = \frac{1}{2} \pi (R^2 + r^2) h = 1,570796 (R^2 + r^2) h.$$

## 2.4.17. Тела вращения вообще

### 1. Теоремы Гульдена (Паппуса)

1) Поверхность тела, полученная вследствие вращения *плоской кривой* вокруг оси  $zz$ , лежащей в плоскости кривой и ее не пересекающей, равна произведению длины образующей линии на *путь* ее центра тяжести (рис. 2.59):

$$M = l \cdot 2\pi r.$$

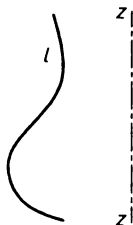


Рис. 2.59

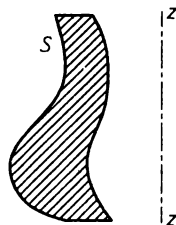


Рис. 2.60

2) Объем тела, полученный вследствие вращения *плоской фигуры* вокруг оси *zz*, лежащей в плоскости фигуры и ее не пересекающей, равен произведению площади образующей фигуры на *путь* ее центра тяжести (рис. 2.60):

$$V = F \cdot 2\pi r.$$

#### 2.4.18. Бочка

Если бока бочки параболические, то точно:

$$V = \frac{1}{15} \pi l \left( 2D^2 + Dd + \frac{3}{4} d^2 \right);$$

$$\frac{1}{15} \pi = 0,2094395.$$

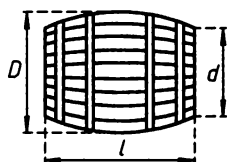


Рис. 2.61

Если бока бочки изогнуты по дуге круга, то приблизительно:

$$V = \frac{1}{12} \pi l (2D^2 + d^2); \quad \frac{1}{12} \pi = 0,2618.$$

По формуле *Puller*:

$$V = l (0,36D^2 + 0,23Dd + 0,20d^2).$$

#### 2.4.19. Чан

Если основания — произвольные эллипсы (рис. 2.62), то

$$V = \frac{1}{6} \pi h [(2a + a_1)b + (2a_1 + a)b_1],$$

где  $a, b, a_1, b_1$  — полуоси оснований и  $h$  — высота чана.

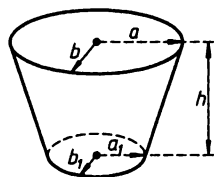


Рис. 2.62

#### 2.4.20. Цилиндрическое кольцо (тор)

По теореме *Гульдена*:

$$V = \frac{\pi d^2}{4} \cdot \pi D = \frac{\pi^2}{4} D d^2 = 2,4674 D d^2;$$

$$A = \pi d \cdot \pi D = \pi^2 D d = 9,8696 D d.$$

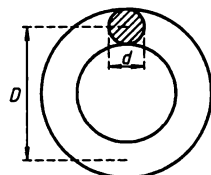


Рис. 2.63

### 2.4.21. Полуцилиндрическое кольцо (обруч)

Сечение — полукруг радиуса  $r$ .

$$V = \frac{\pi r^2}{2} \cdot 2\pi p = \frac{\pi r^2}{2} 2\pi \left( R + \frac{4}{3} \cdot \frac{r}{\pi} \right) =$$

$$= 9,87 R r^2 + 4,189 r^3.$$

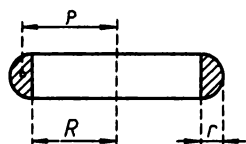


Рис. 2.64

$$M = \pi r \cdot 2\pi p = \pi r \cdot 2\pi \left( R + \frac{2r}{\pi} \right) = 19,739 R r + 12,566 r^2.$$

$$A = 19,739 R r + 12,566 (r + R) r.$$

### 2.4.22. Цепное звено

1. Эллиптическое звено (рис. 2.65):

$$A = \pi^2 d \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}},$$

$$V = \frac{\pi^2}{4} d^2 \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$

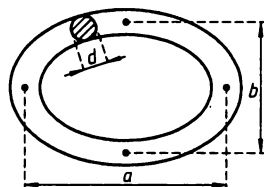


Рис. 2.65

2. Продолговатое звено с полукруглыми концами (рис. 2.66):

$$A = \pi^2 D d + 2\pi d h,$$

$$V = \frac{\pi d^2}{4} (\pi D + 2h).$$

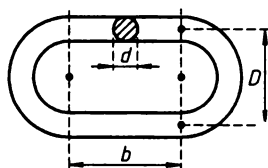


Рис. 2.66

### 3. ТРИГОНОМЕТРИЯ

#### 3.1. Стандартные обозначения

$\sin$	синус;
$\cos$	косинус;
$\operatorname{tg}$	тангенс;
$\operatorname{ctg}$	котангенс;
$\sec$	секанс;
$\operatorname{cosec}$	косеканс;
$\operatorname{arc} \sin$	арксинус;
$\operatorname{arc} \cos$	арккосинус;
$\operatorname{arc} \operatorname{tg}$	арктангенс;
$\operatorname{arc} \operatorname{ctg}$	арккотангенс.

Для обозначения степени тригонометрической функции показатель степени ставится при знаке этой функции; например,  $\sin^2 x$ .

Для обозначения обратных тригонометрических функций перед вышеуказанными обозначениями ставится  $\operatorname{arc}$  (arcus — дуга); например,  $\operatorname{arc} \sin x$  — дуга, синус которой равен  $x$ .

#### 3.2. Тригонометрические величины и формулы

**1. Основные понятия.** В круге, описанном радиусом, равным единице (рис. 3.1):

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= CB, & \cos \alpha &= OC, \\ \operatorname{tg} \alpha &= AT, & \operatorname{ctg} \alpha &= ED, \\ \sec \alpha &= OT, & \operatorname{cosec} \alpha &= OD. \\ \sin \operatorname{vers} \alpha &= CA^{1)} = 1 - \cos \alpha, \\ \cos \operatorname{vers} \alpha &= FE^{2)} = 1 - \sin \alpha.\end{aligned}$$

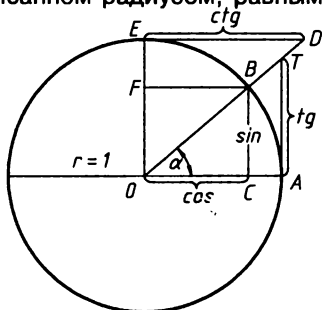


Рис. 3.1

<sup>1)</sup>  $\sin \operatorname{vers} = \sin \operatorname{us} \operatorname{versus}$  (обращенный синус).

<sup>2)</sup>  $\cos \operatorname{vers} = \cos \operatorname{inus} \operatorname{versus}$  (обращенный косинус).

## 2. Правила знаков (табл. 3.1)

Таблица 3.1

	sin	cos	tg	ctg	sec	cosec
I четверть.....	+	+	+	+	+	+
II четверть.....	+	-	-	-	-	+
III четверть.....	-	-	+	+	-	-
IV четверть.....	-	+	-	-	+	-

## 3. Значения тригонометрических функций некоторых углов (табл. 3.2)

Таблица 3.2

Угол	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\pm\infty$	0
ctg	$\pm\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$
sec	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	$\pm\infty$	-2	$-\sqrt{2}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	-1	$\pm\infty$	1
cosec	$\pm\infty$	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	$\pm\infty$	-1	$\pm\infty$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = 0,70711; \quad \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,86603; \quad \frac{\sqrt{3}}{3} = 0,57735; \quad \frac{2\sqrt{3}}{3} = 1,15470;$$

$$\sqrt{2} = 1,41422; \quad \sqrt{3} = 1,73206$$

## 4. Изменение тригонометрических функций при изменении углов от $-\alpha$ до $360^\circ n \pm \alpha$ (табл. 3.3)

Таблица 3.3

Аргумент	sin	cos	tg	ctg	sec	cosec
$-\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\sec\alpha$	$-\operatorname{cosec}\alpha$
$90^\circ \pm \alpha$	$+\cos\alpha$	$\mp \sin\alpha$	$\mp \operatorname{ctg}\alpha$	$\mp \operatorname{tg}\alpha$	$\mp \operatorname{cosec}\alpha$	$+\sec\alpha$
$180^\circ \pm \alpha$	$\mp \sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm \operatorname{tg}\alpha$	$\pm \operatorname{ctg}\alpha$	$-\sec\alpha$	$\mp \operatorname{cosec}\alpha$
$270^\circ \pm \alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm \sin\alpha$	$\mp \operatorname{ctg}\alpha$	$\mp \operatorname{tg}\alpha$	$\pm \operatorname{cosec}\alpha$	$-\sec\alpha$
$360^\circ n \pm \alpha$	$\pm \sin\alpha$	$+\cos\alpha$	$\pm \operatorname{tg}\alpha$	$\pm \operatorname{ctg}\alpha$	$+\sec\alpha$	$\pm \operatorname{cosec}\alpha$

Диаграмма на рис. 3.2 дает картину тригонометрических функций при изменении аргумента в пределах от  $-360^\circ$  до  $+360^\circ$ .

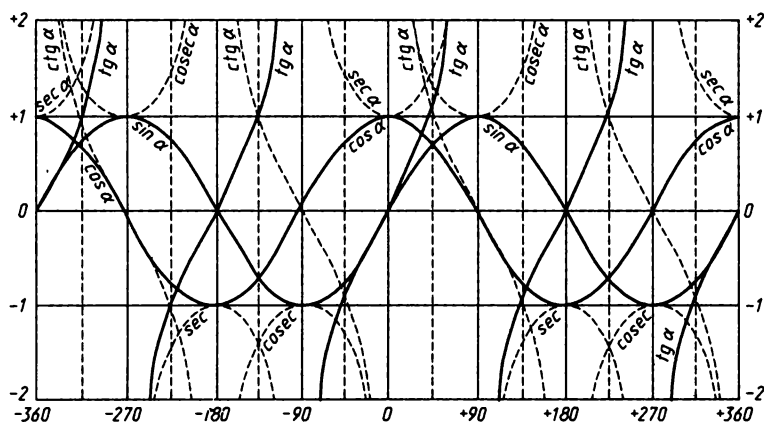


Рис. 3.2

## 5. Важнейшие зависимости

1.  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ ;
2.  $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$ ;
3.  $\sec \alpha \cdot \cos \alpha = 1$ ;
4.  $\operatorname{cosec} \alpha \cdot \sin \alpha = 1$ ;
5.  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ ;
6.  $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ ;
7.  $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$ ;
8.  $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$ ;
9.  $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$ ;
10.  $\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta \mp 1}{\operatorname{ctg} \beta \pm \operatorname{ctg} \alpha}$ .

$$11. \sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$12. \sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$13. \cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$14. \cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$15. \operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha \cos\beta};$$

$$16. \operatorname{ctg}\alpha \pm \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\sin\alpha \sin\beta};$$

$$17. \sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cos\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha};$$

$$18. \sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}};$$

$$19. \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha};$$

$$20. \cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}};$$

$$21. \sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2};$$

$$22. \cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2};$$

$$23. \sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha;$$

$$24. \cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha;$$

$$25. \sin^3\alpha = \frac{3\sin\alpha - \sin 3\alpha}{4};$$

$$26. \cos^3\alpha = \frac{3\cos\alpha + \cos 3\alpha}{4};$$

$$27. \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{2}{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha};$$

$$28. \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha} = \frac{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha}{2};$$

$$29. \operatorname{tg}\alpha = \pm \sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}} = \frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} = \frac{1-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha};$$

$$30. \operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha};$$

$$31. \operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^3\alpha - 3\operatorname{ctg}\alpha}{3\operatorname{ctg}^2\alpha - 1};$$

$$32. \sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1-\cos \alpha}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{1+\sin \alpha} - \frac{1}{2}\sqrt{1-\sin \alpha};$$

$$2\sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - \cos \alpha;$$

$$33. \cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1+\cos \alpha}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{1+\sin \alpha} + \frac{1}{2}\sqrt{1-\sin \alpha};$$

$$2\cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1 + \cos \alpha;$$

$$34. \frac{\operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{\left(1 - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right)^2}{\left(1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right)^2} = \operatorname{tg}^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha};$$

$$35. \sin(45^\circ \pm \alpha) = \cos(45^\circ \mp \alpha);$$

$$36. \operatorname{tg}(45^\circ \pm \alpha) = \operatorname{ctg}(45^\circ \mp \alpha);$$

$$37. \operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) = \operatorname{ctg}\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos \alpha}{1 - \sin \alpha} = \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha} = \\ = \sec \alpha + \operatorname{tg} \alpha;$$

$$38. \operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = \operatorname{ctg}\left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = \frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} = \\ = \sec \alpha - \operatorname{tg} \alpha;$$

$$39. \cos \alpha \pm \sin \alpha = \sqrt{1 \pm \sin 2\alpha} = \sqrt{2} \sin(45^\circ \pm \alpha) = \sqrt{2} \cos(45^\circ \mp \alpha);$$

$$40. \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta = \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha = \sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta);$$

$$41. \cos^2 \alpha - \sin^2 \beta = \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha = \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta);$$

$$42. \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) - \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta);$$

$$43. \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) + \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta);$$

$$44. \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \sin(\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \sin(\alpha - \beta);$$

$$45. \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = \pm \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{ctg} \alpha \pm \operatorname{ctg} \beta};$$

$$46. \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta = \pm \frac{\operatorname{ctg} \alpha \pm \operatorname{ctg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta};$$

$$47. \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{tg} \beta = \pm \frac{\operatorname{ctg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{ctg} \beta}.$$

**6. Выражение каждой тригонометрической величины через все остальные (табл. 3.4)**

Таблица 3.4

	sin	cos	tg	ctg	sec	cosec
$\sin \alpha =$	$\sin \alpha$	$\pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$	$\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$	$\frac{1}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}}$	$\frac{\pm \sqrt{\sec^2 \alpha - 1}}{\sec \alpha}$	$\frac{1}{\operatorname{cosec} \alpha}$
$\cos \alpha =$	$\pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$	$\cos \alpha$	$\frac{1}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$	$\frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}}$	$\frac{1}{\sec \alpha}$	$\frac{\pm \sqrt{\operatorname{cosec}^2 \alpha - 1}}{\operatorname{cosec} \alpha}$
$\operatorname{tg} \alpha =$	$\frac{\sin \alpha}{\pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}$	$\frac{\pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha}$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}$	$\pm \sqrt{\sec^2 \alpha - 1}$	$\frac{1}{\pm \sqrt{\operatorname{cosec}^2 \alpha - 1}}$
$\operatorname{ctg} \alpha =$	$\frac{\pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha}$	$\frac{\cos \alpha}{\pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}$	$\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\frac{1}{\pm \sqrt{\sec^2 \alpha - 1}}$	$\pm \sqrt{\operatorname{cosec}^2 \alpha - 1}$
$\sec \alpha =$	$\frac{1}{\pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}$	$\frac{1}{\cos \alpha}$	$\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$	$\frac{\pm \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}}{\operatorname{ctg} \alpha}$	$\sec \alpha$	$\frac{\operatorname{cosec} \alpha}{\pm \sqrt{\operatorname{cosec}^2 \alpha - 1}}$
$\operatorname{cosec} \alpha =$	$\frac{1}{\sin \alpha}$	$\frac{1}{\pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}$	$\frac{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}{\operatorname{tg} \alpha}$	$\pm \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}$	$\frac{\sec \alpha}{\pm \sqrt{\sec^2 \alpha - 1}}$	$\operatorname{cosec} \alpha$

## 7. Тригонометрические ряды

$$1. \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots; \quad -\infty < x < +\infty$$

$$2. \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots; \quad -\infty < x < +\infty$$

$$3. \operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} + \dots; \quad -\frac{\pi}{2} < x < +\frac{\pi}{2}$$

$$4. \operatorname{ctg} x = 1 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{45} - \frac{2x^6}{945} - \frac{x^8}{4725} - \dots; \quad -\pi < x < +\pi$$

$$5. \arcsin x = x + \frac{1 \cdot x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \dots; \quad -1 \leq x \leq +1$$

$$6. \arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x;$$

$$7. \operatorname{arc} \operatorname{tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \dots; \quad -1 \leq x \leq +1$$

Примечание. В формулах 1–7 аргумент  $x$  выражен в радианах. Если  $x^\circ$  — число градусов, то

$$x = \frac{\pi}{180} x^\circ = 0,01745329 x^\circ; \quad x^\circ = 57,2957795 x \approx 57,3 x.$$

### 3.3. Общие формулы для решения треугольников

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ;$$

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \text{полупериметр (рис. 3.3).}$$

#### 1. Теорема синусов:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

#### 2. Формулы высот:

$$h_a = b \sin C = c \sin B; \quad h_b = c \sin A = a \sin C; \quad h_c = a \sin B = b \sin A.$$

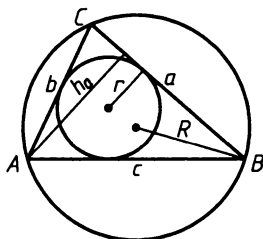


Рис. 3.3

### 3. Теорема косинусов:

$$a = b \cos C + c \cos B; \quad b = c \cos A + a \cos C;$$

$$c = a \cos B + b \cos A.$$

### 4. Формула Непера, или теорема тангенсов:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{A+B}{2}}{\operatorname{tg} \frac{A-B}{2}}.$$

### 5. Формулы Мольвейде:

$$(b+c) \sin \frac{A}{2} = a \cos \frac{B-C}{2}; \quad (b-c) \cos \frac{A}{2} = a \sin \frac{B-C}{2}.$$

### 6. Теорема Пифагора (обобщенная):

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

### 7. Формулы половинных углов:

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}; \quad \cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}};$$

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} = \frac{r}{p-a}.$$

### 8. Формулы площади:

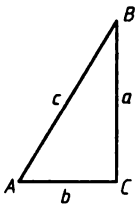
$$S = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ac \sin B;$$

$$S = \frac{abc}{4R} = rp; \quad S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

## 3.4. Решение прямоугольных треугольников

$a, b$  — катеты;  $A, B$  — противолежащие им углы;  $c$  — гипотенуза;  
 $S$  — площадь (табл. 3.5).

Таблица 3.5

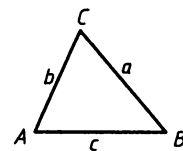
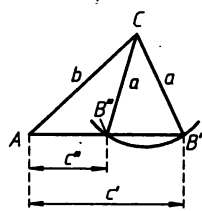
Данные	Искомые	Решения
$a, b$	$A, B, c, S$	$\operatorname{tg} A = \frac{a}{b}; \quad \operatorname{tg} B = \frac{b}{a};$ $c = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad B = 90^\circ - A;$ $c = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\cos A}; \quad S = \frac{ab}{2}.$  <p style="text-align: center;">Рис. 3.4</p>
$a, c$	$A, B, b, S$	$\sin A = \frac{a}{c}; \quad \cos B = \frac{a}{c}; \quad b = \sqrt{c^2 - a^2};$ $b = \sqrt{(c+a)(c-a)} \quad \text{или} \quad b = c \cos A = c \sin B;$ $B = 90^\circ - A; \quad S = \frac{a}{2} \sqrt{(c+a)(c-a)} = \frac{1}{2} ac \sin B.$
$a, A$	$b, c, S$	$b = a \operatorname{ctg} A; \quad c = \frac{a}{\sin A}; \quad S = \frac{a^2}{2} \operatorname{ctg} A.$
$b, A$	$a, c, S$	$a = b \operatorname{tg} A; \quad c = \frac{b}{\cos A}; \quad S = \frac{b^2}{2} \operatorname{tg} A.$
$c, A$	$a, b, S$	$a = c \sin A; \quad b = c \cos A; \quad S = \frac{c^2}{4} \sin 2A.$

### 3.5. Решение косоугольных треугольников

$S$  — площадь;  $r$  — радиус вписанного круга;  $R$  — радиус описанного круга;  $h_a, h_b, h_c$  — высоты (табл 3.6).

Таблица 3.6

Данные	Искомые	Решения
$a, b, c$	$A, B, C$	$A, B$ и $C$ — по формулам половинных углов. Проверка: $A+B+C=180^\circ.$
	$S$	$2p = a+b+c;$ $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = r \cdot p.$

Данные	Искомые	Решения
$a, b, c$	$r$	$r = \frac{S}{p}; \quad \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{r}{p-a};$
	$R$	$\operatorname{tg} \frac{B}{2} = \frac{r}{p-b}; \quad \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{r}{p-c};$ $R = \frac{a}{2 \sin A} = \frac{abc}{4S};$ $2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$
	$h_a, h_b, h_c$	$h_a = b \sin C; \quad h_b = c \sin A; \quad h_c = a \sin B.$
$a, b, A$	$B, C$	<p>Если <math>a &gt; b</math> и, следовательно, <math>\angle B</math> — острый (рис. 3.6), то — одно решение:</p>  <p style="text-align: right;">Рис. 3.5</p>
	$c$	$\sin B = \frac{b \sin A}{a};$ $C = 180^\circ - (A + B);$ $c = \frac{a \sin C}{\sin A} =$ $= b \cos A + a \cos B = b \cos A + \sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 A}.$ <p>Если <math>b &gt; a &gt; b \sin A</math> (при этом <math>\angle A</math> — острый), то — два решения (рис. 3.6, 3.7):</p> <p>1) <math>B' &lt; 90^\circ</math> и 2) <math>B'' = 180^\circ - B' &gt; 90^\circ</math>;</p> $c = b \cos A \pm \sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 A}$ <p>или <math>c = b \cos A + a \cos B</math>.</p> <p>Сторона <math>c</math> получает два значения (<math>c'</math> и <math>c''</math>) соответственно углам <math>B'</math> и <math>B''</math>.</p>  <p style="text-align: right;">Рис. 3.7</p>
	$S$	<p>Если <math>a &lt; b \sin A</math>, то треугольник невозможен.</p> $S = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ac \sin B.$

Данные	Искомые	Решения
$a, B, C$	$A$	$A = 180^\circ - (B + C).$
	$b, c$	$b = \frac{a \sin B}{\sin A} = \frac{a \sin B}{\sin(B + C)}; \quad c = \frac{a \sin C}{\sin A} = \frac{a \sin C}{\sin(B + C)}.$
	$S$	$S = \frac{ab \sin C}{2} = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A} = \frac{a^2}{2(\operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C)}.$
$a, A, B$	$C$	$C = 180^\circ - (A + B).$
	$b, c, S$	Остальное — по предыдущему.
$a, b, C$	$c, A, B$	$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos C}; \quad \sin A = \frac{a \sin C}{c};$ $\sin B = \frac{b \sin C}{c}; \quad A + B + C = 180^\circ;$ или по формуле Непера: $\operatorname{tg} \frac{A+B}{2} = \frac{a+b}{a-b} \operatorname{ctg} \frac{C}{2}; \quad \frac{A+B}{2} = 90^\circ - \frac{C}{2};$ $A = \frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2}; \quad B = \frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{2};$ или $\operatorname{tg} A = \frac{a \sin C}{b - a \cos C}; \quad \operatorname{tg} B = \frac{b \sin C}{a - b \cos C};$
	$S$	$S = \frac{ab \sin C}{2}.$

### 3.6. Синусоидальные величины

Синусоида в общем случае (рис. 3.8):

$$a = A_m \sin(\omega t + \alpha) = A_m \sin \omega \left( t + \frac{\alpha}{\omega} \right),$$

где  $A_m$  — амплитуда;  $\omega$  — частота;  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  — период;  $\alpha$  — начальная фаза;  $-\frac{\alpha}{\omega}$  — начальный сдвиг.

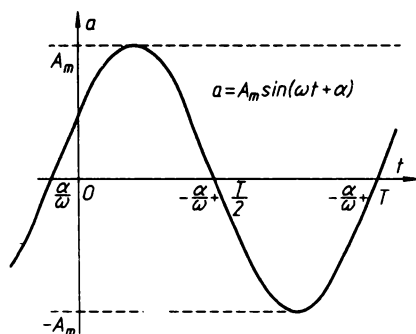


Рис. 3.8

Векторная диаграмма (рис. 3.9):

$$A_m \sin(\omega t + \alpha) = a' \sin \omega t + a'' \cos \omega t;$$

$$a' = A_m \cos \alpha; \quad a'' = A_m \sin \alpha;$$

$$a' + ja'' = A_m e^{j\alpha}.$$

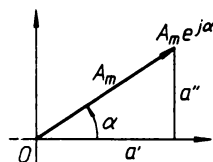


Рис. 3.9

Сложение синусоид с одинаковыми частотами:

$$A_1 \sin(\omega t + \alpha_1) + A_2 \sin(\omega t + \alpha_2) =$$

$$= A_m \sin(\omega t + \alpha),$$

где

$$A_m e^{j\alpha} = A_1 e^{j\alpha_1} + A_2 e^{j\alpha_2} \text{ (рис. 3.10)}$$

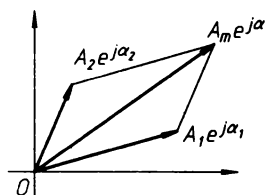


Рис. 3.10

или

$$A_m = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2)};$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2}{A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2}.$$

## 4. ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

### 4.1. Стандартные обозначения

sh синус гиперболический;  
 ch косинус гиперболический;  
 th тангенс гиперболический;  
 cth котангенс гиперболический.

Для обозначения степени гиперболической функции показатель степени ставится при знаке этой функции, например  $\text{sh}^2 x$ .

Для обозначения обратных гиперболических функций перед вышеуказанными обозначениями ставится Ar (area — площадь). Не смешивать с arcs — дуга.

Ar sh арсинус гиперболический;  
 Ar ch аркосинус гиперболический;  
 Ar th артангенс гиперболический;  
 Ar cth аркотангенс гиперболический.

### 4.2. Сущность гиперболических функций и важнейшие соотношения

В теории переменных токов, в строительной механике и в других областях техники находят применение гиперболические функции, которые, по аналогии с тригонометрическими функциями, могут быть представлены отрезками на равнобокой гиперболе (рис. 4.1), причем аргумент  $x = \omega$  — площади гиперболического сектора (заштрихованного на рисунке).

Если вещественную полуось гиперболы принять за единицу ( $OA = 1$ ), то

$$P_1 R = \text{sh} x, \quad OR = \text{ch} x;$$

$$S_1 A = \text{th} x = \frac{\text{sh} x}{\text{ch} x}.$$

Обратное отношение  $\frac{\text{sh} x}{\text{ch} x}$  называется гиперболическим котангенсом ( $\text{cth} x$ ), следовательно

$$\text{th} x \cdot \text{cth} x = 1.$$

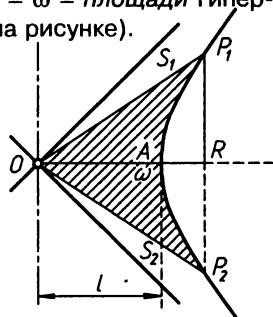


Рис. 4.1

Гиперболические *синус* и *косинус* следующим образом разлагаются в ряды:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots \quad |x| < \infty$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots \quad |x| < \infty$$

Отсюда получаются соотношения

$$e^x = \operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x, \quad e^{-x} = \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x,$$

с помощью которых можно вычислять  $e^x$  и  $e^{-x}$ , пользуясь таблицей гиперболических функций, например,

$$e^{0,58} = \operatorname{sh} 0,58 + \operatorname{ch} 0,58 = 0,613070 + 1,172968 = \underline{1,786038};$$

$$e^{-0,58} = \operatorname{ch} 0,58 - \operatorname{sh} 0,58 = 1,172968 - 0,613070 = \underline{0,559898}.$$

Гиперболический *косинус* — функция четная, т. е.  $\operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x$ , а гиперболические *синус*, *тангенс* и *котангенс* — функции нечетные, т. е.  $\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x$  и т. д.

Графики см. на рис. 4.2.

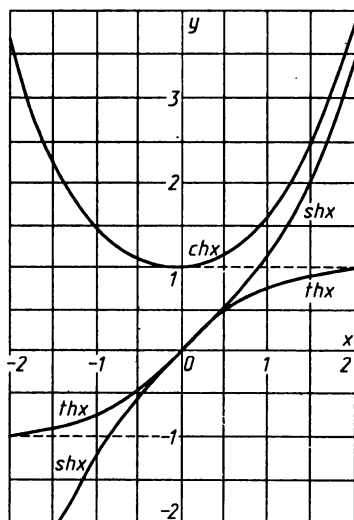


Рис. 4.2

Для вещественных значений аргумента  $x$  гиперболический синус может иметь любое положительное или отрицательное значение, тогда как

$$\operatorname{ch} x \geq 1 \quad \text{и} \quad -1 \leq \operatorname{th} x \leq +1.$$

Важнейшие соотношения:

1.  $\operatorname{sh}(\varphi \pm x) = \operatorname{sh} \varphi \operatorname{ch} x \pm \operatorname{ch} \varphi \operatorname{sh} x;$
2.  $\operatorname{ch}(\varphi \pm x) = \operatorname{ch} \varphi \operatorname{ch} x \pm \operatorname{sh} \varphi \operatorname{sh} x;$
3.  $\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x;$
4.  $\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x;$
5.  $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1.$

Зависимости между гиперболическими и тригонометрическими функциями ( $i$  — мнимый знак):

$$\begin{aligned} i \operatorname{sh} x &= \sin ix; & -i \operatorname{sh} ix &= \sin x; & \operatorname{ch} x &= \cos ix; & \operatorname{ch} ix &= \cosh x; \\ i \operatorname{th} x &= \operatorname{tg} ix; & -i \operatorname{th} ix &= \operatorname{tg} x; & -i \operatorname{cth} x &= \operatorname{ctg} ix; & i \operatorname{cth} ix &= \operatorname{ctg} x. \end{aligned}$$

Гиперболические функции комплексного аргумента:

$$\operatorname{ch}(\varphi \pm ix) = \operatorname{ch} \varphi \cdot \cos x \pm i \operatorname{sh} \varphi \cdot \sin x = a + bi;$$

$$\operatorname{sh}(\varphi \pm ix) = \operatorname{sh} \varphi \cdot \cos x \pm i \operatorname{ch} \varphi \cdot \sin x = c + di.$$

Гиперболические функции суть функции периодические с мнимым периодом — для синуса и косинуса  $2\pi i$ , а для тангенса и котангенса  $\pi i$ , например,

$$\operatorname{sh}(x \pm 2k\pi i) = \operatorname{sh} x \cdot \cos 2k\pi \pm i \operatorname{ch} x \cdot \sin 2k\pi = \operatorname{sh} x.$$

### 4.3. Обратные гиперболические функции

Если  $\operatorname{sh} x = u$ ,  $\operatorname{ch} x = u$  и т. д., то принято писать  $x = \operatorname{Arsh} u$  (т. е.  $x$  есть площадь, которой соответствует гиперболический синус, равный  $u$ ) и соответственно,  $\operatorname{Arch} u$ ,  $\operatorname{Arth} u$ ,  $\operatorname{Arcth} u$ , причем

$$\operatorname{Arsh} u = \ln(u + \sqrt{u^2 + 1}); \quad \operatorname{Arch} u = \ln(u \pm \sqrt{u^2 - 1});$$

$$\operatorname{Arth} u = \frac{1}{2} \ln \frac{1+u}{1-u}; \quad \operatorname{Arcth} u = \frac{1}{2} \ln \frac{u+1}{u-1}.$$

Зависимости между *arc*- и *Ar*- функциями:

$$\operatorname{arc} \sin u = -i \operatorname{Arsh} iu = -i \ln(iu + \sqrt{1 - u^2});$$

$$\operatorname{arc} \cos u = -i \operatorname{Arch} u = \pm i \ln(u + i\sqrt{1 - u^2});$$

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} u = -i \operatorname{Ar} \operatorname{th} iu = \frac{1}{2i} \ln \frac{1 + iu}{1 - iu};$$

$$\operatorname{arc} \operatorname{ctg} u = i \operatorname{Ar} \operatorname{cth} iu = \frac{1}{2i} \ln \frac{i u - 1}{i u + 1}.$$

## 5. ЦЕЛЫЕ И ДРОБНЫЕ РАЦИОНАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

### 5.1. Разложение многочлена на множители

Каждый многочлен  $P(x)$  степени  $n$  может быть разложен на линейные множители:

$$P(x) = A(x-a)^k(x-b)^l \dots,$$

где  $a, b, \dots$  — корни уравнения  $P(x) = 0$ ;  $k, l, \dots$  — их кратности:  $k + l + \dots = n$ .

Условия того, что кратность корня  $x = a$  в точности равна  $k$ :

$$P(a) = 0, \quad P'(a) = 0, \dots;$$

$$P^{(k-1)}(a) = 0, \quad P^{(k)}(a) \neq 0.$$

Если все коэффициенты многочлена — действительные числа, то его комплексные корни попарно сопряжены, причем кратности попарно сопряженных корней одинаковы. В этом случае разложение многочлена на действительные множители имеет вид:

$$P(x) = A(x-a)^k(x-b)^l \dots (x^2 + px + q)^r \dots;$$
$$(k + l + \dots + 2r + \dots = n).$$

### 5.2. Разложение дробно-рациональной функции на целую часть и простейшие дроби

Дробь

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{q_0 x^m + q_1 x^{m-1} + \dots + q_m}{x^n + p_1 x^{n-1} + \dots + p_n}$$

называется правильной, если степень числителя меньше степени знаменателя ( $m < n$ ).

Неправильную дробь можно преобразовать в сумму многочлена и правильной дроби путем выделения целой части (посредством деления многочлена на многочлен).

**Пример.**

$$\frac{x^3 - 3x^2 + 5}{x^2 + 1} = x - 3 + \frac{-x + 8}{x^2 + 1}.$$

Всякая правильная несократимая дробь  $\frac{Q(x)}{P(x)}$  может быть единственным образом разложена в сумму простейших дробей: –

$$\begin{aligned} \frac{Q(x)}{P(x)} &= \frac{q_0 x^m + q_1 x^{m-1} + \dots + q_m}{(x-a)^k (x-b)^l \dots} = \\ &= \frac{A_k}{(x-a)^k} + \frac{A_{k-1}}{(x-a)^{k-1}} + \dots + \frac{A_1}{x-a} + \frac{B_l}{(x-b)^l} + \frac{B_{l-1}}{(x-b)^{l-1}} + \dots + \frac{B_1}{x-b} + \dots \end{aligned}$$

### 5.3. Метод неопределенных коэффициентов

Записываем разложение с буквенными коэффициентами; умножаем обе его части на знаменатель  $P(x)$ ; из полученного тождества двух многочленов находим значения коэффициентов путем сравнения коэффициентов при одинаковых степенях  $x$ .

**Пример.**

$$\frac{x+2}{x(x+1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B_1}{x+1} + \frac{B_2}{(x+1)^2} + \frac{B_3}{(x+1)^3};$$

$$x+2 = A(x+1)^3 + B_1 x(x+1)^2 + B_2 x(x+1) + B_3 x.$$

$$\left. \begin{array}{l|l} x^3 & 0 = A + B_1 \\ x^2 & 0 = 3A + 2B_1 + B_2 \\ x & 1 = 3A + B_1 + B_2 + B_3 \\ 1 & 2 = A \end{array} \right\} \begin{array}{l} B_1 = -2 \\ B_2 = -2 \\ B_3 = -1 \\ A = 2 \end{array}.$$

Если среди корней знаменателя есть комплексные, то соответствующие слагаемые в указанном разложении будут иметь комплексные коэффициенты. Для разложения дроби с действительными коэффициентами на действительные простейшие дроби каждому множителю  $(x^2 + px + q)^r$  знаменателя ставят в соответствие сумму

$$\frac{M_r x + N_r}{(x^2 + px + q)^r} + \dots + \frac{M_1 x + N_1}{x^2 + px + q}$$

Разложение и здесь ведется методом неопределенных коэффициентов.

## 6. СТЕПЕННЫЕ ФУНКЦИИ

При любом действительном  $a$  степенная функция  $y = x^a$  определена для всех положительных значений  $x$ . Графики при различных положительных и отрицательных  $a$  см. рис. 6.1.

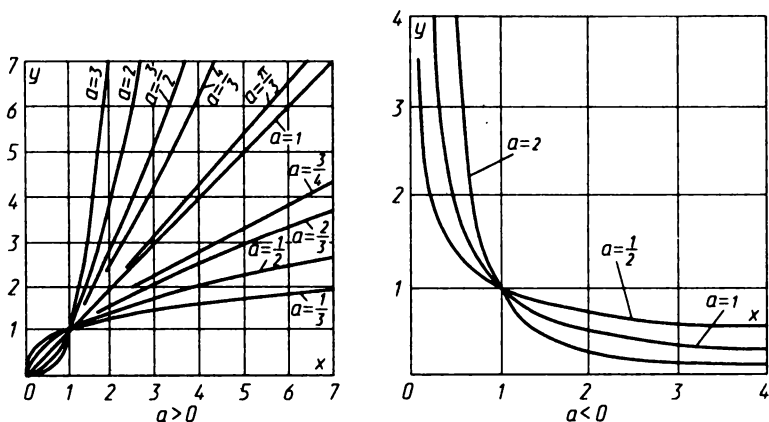


Рис. 6.1

При комплексных значениях  $a$  степенная функция определяется при помощи показательной и логарифмической функций:

$$x^a = e^{a \ln x}.$$

## 7. ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ И ЛОГАРИФИЧЕСКАЯ ФУНКЦИИ

### 7.1. Показательная функция

Показательная функция  $y=a^x$  ( $a>0$ ) определена для всех действительных значений  $x$ . При ( $a>1$ ) функция возрастает. График ее асимптотически приближается к оси абсцисс слева (рис. 7.1).

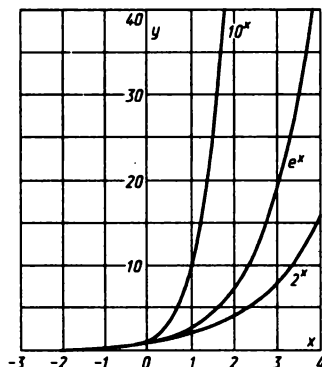


Рис. 7.1

Основное свойство графика функции  $y=e^{-\frac{t}{T}}$ : подкасательная в любой точке постоянна и равна  $T$  (рис. 7.2). Поведение функции  $y=1-e^{-\frac{t}{T}}$  видно из рис. 7.3.

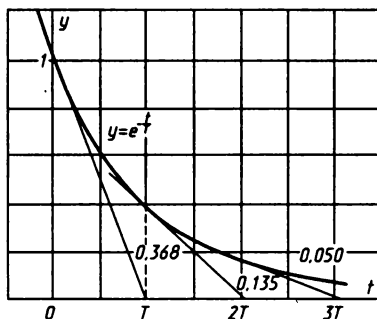


Рис. 7.2

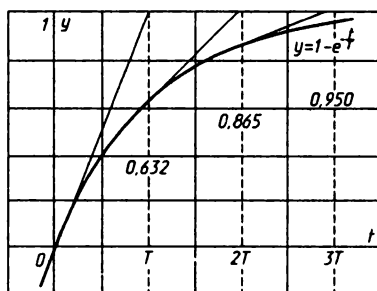


Рис. 7.3

## 7.2. Логарифмическая функция

Логарифмическая функция является обратной для показательной:  $y = \log_a x$  означает, что  $a^y = x$  ( $a > 0$ ) (рис. 7.4). Функция  $\log_a x$  определена только при  $x > 0$ . Основные тождества:

$$a^{\log_a x} \equiv x; \quad \log_a(a^x) \equiv x.$$

Десятичные логарифмы:  $\lg x = \log_{10} x$ .

Натуральные логарифмы:  $\ln x = \log_e x$ .

Формула перехода от одной системы логарифмов к другой:

$$\log_b x = M \log_a x,$$

где  $M = \log_b a = \frac{1}{\log_a b}$  — модуль перехода.

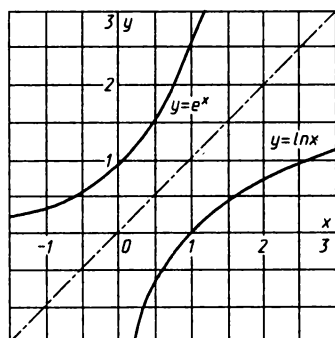


Рис. 7.4

## Модуль десятичных логарифмов

$$M = \lg e = \frac{1}{\ln 10} = 0,434294;$$

## модуль натуральных логарифмов

$$M_1 = \frac{1}{M} = \ln 10 = \frac{1}{\lg e} = 2,302585.$$

Для комплексных значений  $z = x + jy$  показательная функция  $e^z$  определяется формулой

$$e^z = e^x \cos y + je^x \sin y = e^x e^{jy}$$

и имеет чисто мнимый период  $2\pi j$ .

Логарифм комплексного аргумента  $z = re^{j\varphi}$  есть многозначная функция:

$$\operatorname{Ln} z = \ln r + j\varphi = \ln |z| + j \operatorname{Arg} z \quad (z \neq 0).$$

При выборе главного значения  $\arg z = \varphi_0$  получают главное значение логарифма:

$$\ln z = \ln |z| + j \arg z = \ln r + j\varphi_0, \quad (-\pi < \varphi_0 \leq \pi).$$

При этом  $\operatorname{Ln} z = \ln z + 2k\pi j$  ( $k$  — целое).

### Примеры:

$$\ln(-2) = \ln 2 + j\pi; \quad \ln j = j\frac{\pi}{2}; \quad \ln(1 + j\sqrt{3}) = \ln 2 + j\frac{\pi}{3}.$$

### Общая показательная функция

$$a^z = e^{z \operatorname{Ln} a} \quad (a \neq 0).$$

### Пример.

$$j^j = e^{j\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)j} = e^{-\frac{\pi}{2} - 2k\pi} \quad (k \text{ — целое}).$$

## 8. ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

### 8.1. Цилиндрическая функция 1-го рода

Цилиндрическая функция 1-го рода (функция Бесселя) порядка  $\nu$  определяется рядом

$$J_{\nu}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\nu + k + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2k},$$

где  $\nu$  — любое действительное число;  $z$  — комплексное переменное ( $-\pi < \arg z < \pi$ );  $\Gamma$  — гамма-функция.

В частности,

$$J_0(z) = 1 - \left(\frac{z}{2}\right)^2 + \frac{1}{(2!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^4 - \frac{1}{(3!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^6 + \dots;$$

$$J_1(z) = -J'_0(z) = \frac{z}{2} - \frac{1}{1!2!} \left(\frac{z}{2}\right)^3 + \frac{1}{2!3!} \left(\frac{z}{2}\right)^5 - \dots$$

Функция  $J_{\nu}(z)$  регулярна в плоскости с разрезом  $(-\infty; 0)$ . Для действительных положительных значений  $x$  функция  $J_{\nu}(x)$  принимает действительные значения. Для комплексно сопряженных значений  $z = re^{j\theta}$  и  $z^* = re^{-j\theta}$  значения  $J_{\nu}(z)$  и  $J_{\nu}(z^*)$  также сопряжены. Для противоположных значений  $z$  и  $-z$ :

$$J_{\nu}(-z) = (-1)^{\nu} J_{\nu}(z),$$

где  $(-1)^{\nu} = e^{j\nu\pi}$ .

### 8.2. Формулы приведения

$$J_{\nu+1}(z) = \frac{2\nu}{z} J_{\nu}(z) - J_{\nu-1}(z);$$

$$\frac{d}{dz} J_{\nu}(z) = J_{\nu-1}(z) - \frac{\nu}{z} J_{\nu}(z) = \frac{1}{2} [J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z)];$$

$$\frac{d}{dz} z^{\nu} J_{\nu}(z) = z^{\nu} J_{\nu-1}(z); \quad \frac{d}{dz} z^{-\nu} J_{\nu}(z) = -z^{-\nu} J_{\nu+1}(z).$$

$$J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z) \text{ при целом } n.$$

### 8.3. Цилиндрическая функция 2-го рода

Цилиндрическая функция 2-го рода (функция Вебера) порядка  $\nu$  определяется так:

$$\begin{cases} Y_\nu(z) = \frac{J_\nu(z) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(z)}{\sin \nu\pi} & (\nu - \text{нечетное число}); \\ Y_n(z) = \lim_{\nu \rightarrow n} Y_\nu(z) & (n - \text{целое число}). \end{cases}$$

Эти функции регулярны в плоскости с разрезом  $(-\infty; 0)$ , принимают действительные значения для действительных положительных значений  $z$  и комплексно сопряженные значения для сопряженных значений  $z$ ; удовлетворяют тем же формулам приведения, что и цилиндрические функции 1-го рода (см. выше).

При  $z \rightarrow 0$

$$Y_0(z) \approx \frac{2}{\pi} \ln \frac{z}{2} \rightarrow \infty;$$

$$Y_n(z) \approx -\frac{(n-1)!}{\pi} \left(\frac{2}{z}\right)^n \rightarrow \infty \quad (n > 0).$$

### 8.4. Цилиндрическая функция 3-го рода

Цилиндрические функции 3-го рода (функции Ханкеля) порядка  $\nu$  определяются формулами:

$$H_{\nu}^{(1)}(z) = J_\nu(z) + j Y_\nu(z);$$

$$H_{-\nu}^{(2)}(z) = J_\nu(z) - j Y_\nu(z).$$

Эти функции регулярны в плоскости с разрезом  $(-\infty; 0)$ , удовлетворяют тем же формулам приведения, что и цилиндрические функции 1-го и 2-го рода. Кроме того,

$$H_{-\nu}^{(1)}(z) = e^{j\pi\nu} H_{\nu}^{(1)}(z);$$

$$H_{-\nu}^{(2)}(z) = e^{-j\pi\nu} H_{\nu}^{(2)}(z).$$

Для комплексно сопряженных значений  $z = re^{j\theta}$  и  $z^* = re^{-j\theta}$  значение  $H_{\nu}^{(1)}(z)$  сопряжено с  $H_{\nu}^{(2)}(z^*)$ ; в частности, для действительных  $x$  функции  $H_{\nu}^{(1)}(x)$  и  $H_{\nu}^{(2)}(x)$  имеют комплексные сопряженные значения. Для противоположных значений  $z$  и  $-z$

$$H_{\nu}^{(1)}(-z) = -e^{j\pi\nu} H_{\nu}^{(2)}(z).$$

## 8.5. Дифференциальное уравнение Бесселя

Все цилиндрические функции порядка  $\nu$  являются решениями дифференциального уравнения Бесселя

$$z^2 \frac{d^2 u}{dz^2} + z \frac{du}{dz} + (z^2 - \nu^2)u = 0.$$

Общее решение этого уравнения может быть записано в одной из следующих форм:

$$u = C_1 J_\nu(z) + C_2 Y_\nu(z);$$

$$u = C_1 H_\nu^{(1)}(z) + C_2 H_\nu^{(2)}(z),$$

а при нецелом  $\nu$  также в форме

$$u = C_1 J_\nu(z) + C_2 J_{-\nu}(z),$$

где  $C_1, C_2$  — постоянные интегрирования.

## 8.6. Асимптотические формулы

При больших значениях  $z$  значения цилиндрических функций можно вычислить при помощи асимптотических формул:

$$J_\nu(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} [P_\nu(z) \cos \varphi_\nu(z) - Q_\nu(z) \sin \varphi_\nu(z)];$$

$$Y_\nu(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} [P_\nu(z) \sin \varphi_\nu(z) + Q_\nu(z) \cos \varphi_\nu(z)];$$

$$H_\nu^{(1)}(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{\pm j \varphi_\nu(z)} [P_\nu(z) \pm j Q_\nu(z)],$$

где  $|\arg z| \leq \pi - \delta$ ;  $\delta > 0$ ;

$$\varphi_\nu(z) = z - \frac{\pi \nu}{2} - \frac{\pi}{4};$$

$$P_\nu(z) = 1 - \frac{(4\nu^2 - 1)(4\nu^2 - 9)}{2!(8z)^2} + \dots;$$

$$Q_\nu(z) = \frac{4\nu^2 - 1}{8z} - \frac{(4\nu^2 - 1)(4\nu^2 - 9)(4\nu^2 - 25)}{3!(8z)^3} + \dots$$

## 8.7. Модифицированные цилиндрические функции

$$I_\nu(z) = j^{-\nu} I_\nu(jz) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! \Gamma(\nu + k + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2k};$$

$$K_\nu(z) = \frac{\pi}{2} j^{\nu+1} H_\nu^{(1)}(jz),$$

где  $-\pi < \arg z < \frac{\pi}{2}$ ;  $j^\nu = e^{j\frac{\pi\nu}{2}}$ .

Формулы приведения для функций  $I_\nu(z)$ ,  $K_\nu(z)$ :

$$I_{\nu+1}(z) = -\frac{2\nu}{z} I_\nu(z) + I_{\nu-1}(z);$$

$$K_{\nu+1}(z) = \frac{2\nu}{z} K_\nu(z) + K_{\nu-1}(z);$$

$$\frac{d}{dz} I_\nu(z) = I_{\nu-1}(z) - \frac{\nu}{z} I_\nu(z);$$

$$\frac{d}{dz} K_\nu(z) = -K_{\nu-1}(z) - \frac{\nu}{z} K_\nu(z);$$

$$\frac{d}{dz} z^\nu I_\nu(z) = z^\nu I_{\nu-1}(z); \quad \frac{d}{dz} z^\nu K_\nu(z) = -z^\nu K_{\nu-1}(z).$$

При целых  $\nu = n$

$$I_{-n}(z) = I_n(z); \quad K_{-n}(z) = K_n(z).$$

Для действительных положительных значений  $x$  функции  $I_\nu(z)$  и  $K_\nu(z)$  принимают действительные положительные значения, причем  $I_\nu(z)$  возрастает,  $K_\nu(z)$  убывает (рис. 8.1 и 8.2).

Значения функций для  $x$  от 0,0 до 10,0:

$$I_0(x) = 1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{(2!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^4 + \frac{1}{(3!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^6 + \dots;$$

$$I_1(x) = I'_0(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{1!2!} \left(\frac{x}{2}\right)^3 + \frac{1}{2!3!} \left(\frac{x}{2}\right)^5 + \dots$$

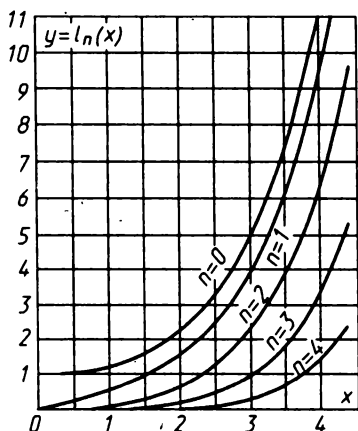


Рис. 8.1

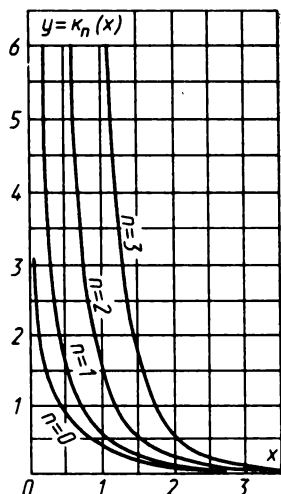


Рис. 8.2

При  $x > 10$  значения этих функций с четырьмя верными знаками можно вычислить по асимптотическим формулам:

$$I_0(x) \approx \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \left( 1 + \frac{0,1250}{x} + \frac{0,070}{x^2} + \frac{0,07}{x^3} \right);$$

$$I_1(x) \approx \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \left( 1 - \frac{0,3750}{x} - \frac{0,117}{x^2} - \frac{0,10}{x^3} \right).$$

Для значений  $z = x\sqrt{j} = xe^{j\frac{\pi}{4}}$  и  $z = xj\sqrt{j} = xe^{j\frac{3\pi}{4}}$  ( $x > 0$ ) удобно рассматривать отдельно действительные и мнимые части:

$$\begin{aligned} I_0(x\sqrt{j}) &= J_0(xj\sqrt{j}) = \text{ber}(x) + j \text{bei}(x) = \\ &= \text{Re}J_0(x\sqrt{j}) - j \text{Im}J_0(x\sqrt{j}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} jI_1(x\sqrt{j}) &= J_1(xj\sqrt{j}) = \text{ber}_1(x) + j \text{bei}_1(x) = \\ &= -\text{Re}J_1(x\sqrt{j}) + j \text{Im}J_1(x\sqrt{j}). \end{aligned}$$

Графики действительных и мнимых частей этих функций для  $x$  от 0,0 до 6,0 даны на рис. 8.3 и 8.4.

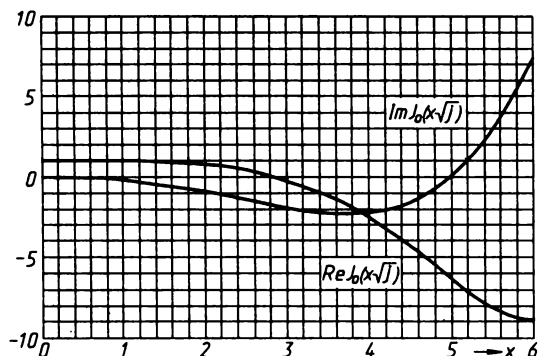


Рис. 8.3

Для  $x > 6$  значения этих функций с тремя верными знаками можно вычислить по асимптотическим формулам:

$$I_0(x\sqrt{j}) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{\frac{x}{\sqrt{2}} + j\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right)} \left[ 1 + \frac{0,0884}{x}(1-j) - j \frac{0,070}{x^2} \right];$$

$$I_1(x\sqrt{j}) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{\frac{x}{\sqrt{2}} + j\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right)} \left[ 1 - \frac{0,2652}{x}(1-j) - j \frac{0,117}{x^2} \right].$$

Значения действительных и мнимых частей функций для  $x$  от 0,0 до 6,0 можно найти по графикам рис. 8.5 и 8.6.

$$\begin{aligned} K_0(x\sqrt{j}) &= \frac{\pi}{2} j H_0^{(1)}(x\sqrt{j}) = \ker(x) + j \operatorname{kei}(x) = \\ &= -\frac{\pi}{2} \operatorname{Im} H_0^{(1)}(x\sqrt{j}) - j \frac{\pi}{2} \operatorname{Re} H_0^{(1)}(x\sqrt{j}); \end{aligned}$$

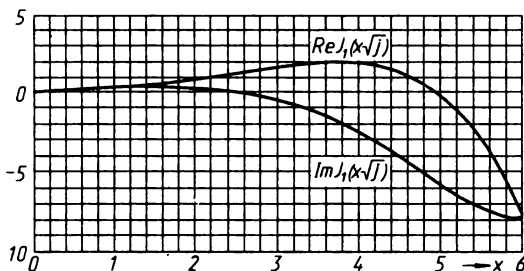


Рис. 8.4

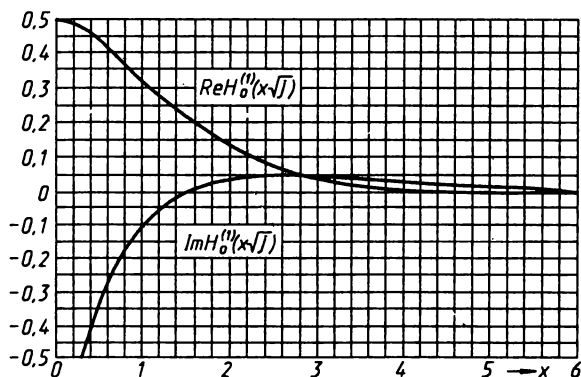


Рис. 8.5

$$\begin{aligned} K_1(x\sqrt{j}) &= -\frac{\pi}{2} H_1^{(1)}(xj\sqrt{j}) = \ker_1(x) + j \operatorname{kei}_1(x) = \\ &= -\frac{\pi}{2} \operatorname{Re} H_1^{(1)}(x\sqrt{j}) - j \frac{\pi}{2} \operatorname{Im} H_1^{(1)}(x\sqrt{j}). \end{aligned}$$

Для  $x > 6$  значения этих функций с тремя верными знаками можно вычислить по асимптотическим формулам:

$$K_0(x\sqrt{j}) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-\frac{x}{\sqrt{2}} - j\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right)} \left[ 1 - \frac{0,0884}{x}(1-j) - j \frac{0,070}{x^2} \right];$$

$$K_1(x\sqrt{j}) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-\frac{x}{\sqrt{2}} - j\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right)} \left[ 1 + \frac{0,2652}{x}(1-j) + j \frac{0,117}{x^2} \right].$$

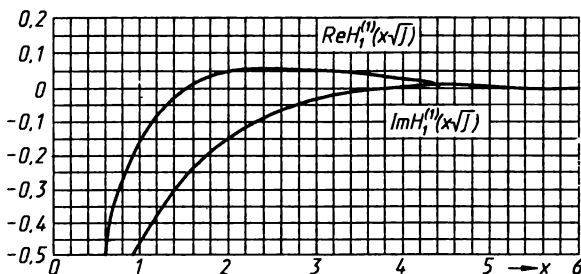


Рис. 8.6

## 9. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

### 9.1. Стандартные обозначения математического анализа

*Постоянные* числа обозначаются преимущественно первыми буквами латинского алфавита; например,  $a, b, c, \dots$

*Переменные* числа обозначаются преимущественно последними буквами латинского алфавита; например,  $x, y, z, u, \dots$

*Функция* одного или нескольких переменных обозначается одним из знаков:

$$f(\ ), \varphi(\ ), F(\ ), \dots; \text{ например, } f(x), f(x, y, z).$$

Примечание. Если среди аргументов функции есть такие, которые желательно выделить, то их отделяют от остальных знаком (;), например:  $F(x, y; \alpha, \beta)$ .

$= \text{const}$  равно постоянному;

$\infty$  бесконечность;

$\lim$  предел;

$\rightarrow$  стремится к ...; например,  $x \rightarrow a, \lim_{x \rightarrow a} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ ;

$\Delta$  приращение;

$d$  дифференциал;

$\delta$  вариация;

' ' ' ' IV, V обозначения последовательных производных от функции одного переменного; например,  $f'(x), y', f^{IV}(x), y^{IV}$ .

Примечание. Если порядок производной обозначается буквой или арабской цифрой, то эта буква или цифра ставятся в скобки.

$\frac{d}{dx}$  выражение первой производной от функции одного переменного через дифференциалы; например,  $\frac{df}{dx}, \frac{dy}{dx}$ .

$\frac{d^n}{dx^n}$  выражение производной  $n$ -го порядка при  $n > 1$  от функции одного переменного через дифференциалы; например,  $\frac{d^2 f}{dx^2}, \frac{d^3 y}{dx^3}$ .

$$\left. \begin{array}{l} f'_x, f'_y, f''_{xx}, f''_{xy} \\ \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \end{array} \right\} \text{частные производные от функции } f \text{ нескольких переменных } x, y, z, \dots$$

$\Sigma$  сумма; например,  $\sum_{k=1}^n u_k = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ .

$\int$  интеграл,  $\int_a^b$  определенный интеграл, с нижним пределом  $a$  и верхним пределом  $b$ .

$\Pi$  произведение; например,  $\prod_{k=1}^n u_k = u_1 u_2 u_3 \dots u_n$ .

$n!$  факториал;  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n$ .

## 9.2. Производные и дифференциалы

Для функции одной переменной  $y = f(x)$ :

приращение  $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ ;

производная  $\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ .

Геометрическое значение: производная в данной точке есть угловой коэффициент касательной к кривой  $y = f(x)$  в точке  $[x; f(x)]$  (рис. 9.1).

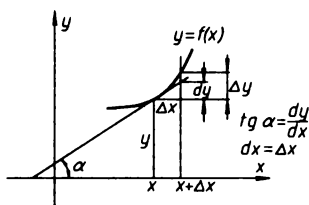


Рис. 9.1

Дифференциал  $dy = df(x) = f'(x)dx$ . Основные свойства дифференциала:

1) относительная погрешность от замены приращения функции ее дифференциалом есть бесконечно малая величина, т. е.

$$\frac{\Delta y - dy}{\Delta x} \rightarrow 0 \text{ при } \Delta x \rightarrow 0;$$

2) формула дифференциала сохраняет свой вид и в том случае, когда  $x$  является не независимой переменной, а функцией от другой переменной.

Производные и дифференциалы высших порядков:

$$f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]';$$

$$d^n y = d(d^{n-1} y) = f^{(n)}(x) dx^n.$$

Для функции двух переменных  $z=F(x, y)$ :  
частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x} = F'_x(x, y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x, y) - F(x, y)}{\Delta x};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = F'_y(x, y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{F(x, y + \Delta y) - F(x, y)}{\Delta y};$$

полный дифференциал

$$dz = dF(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy;$$

дифференциал  $n$ -го порядка

$$d^n z = \left( \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n z = \frac{\partial^n z}{\partial x^n} dx^n + n \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1} \partial y} dx^{n-1} dy +$$

$$+ C_n^m \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-m} \partial y^m} dx^{n-m} dy^m + \dots + n \frac{\partial^n z}{\partial x \partial y^{n-1}} dx dy^{n-1} + \frac{\partial^n z}{\partial y^n} dy^n,$$

где  $C_n^m$  — биномиальные коэффициенты.

Таблица 9.1

Таблица производных элементарных функций

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$x^m$	$mx^{m-1}$	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\sqrt[m]{x}$	$\frac{1}{m \sqrt[m]{x^{m-1}}}$	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$e^x$	$e^x$	$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\operatorname{arccctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$a^x$	$a^x \ln a$	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	$\operatorname{Arsh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{Arch} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\operatorname{th} x$	$-\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{Arth} x$	$\frac{1}{1-x^2}$

Таблица 9.2

## Производные высших порядков

$f(x)$	$f^{(n)}(x)$
$x^m$	$\begin{cases} m(m-1)\dots(m-n+1)x^{m-n} & \text{при целом } m \geq n \text{ и всех нецелых или отрицательных } m. \\ 0 & \text{при целых положительных } m < n \end{cases}$
$e^{\lambda x}$	$\lambda^n e^{\lambda x}$
$\sin \omega x$	$\begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} \omega^n \sin \omega x & \text{при четном } n \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} \omega^n \cos \omega x & \text{при нечетном } n \end{cases}$
$\cos \omega x$	$\begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} \omega^n \cos \omega x & \text{при четном } n \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} \omega^n \sin \omega x & \text{при нечетном } n \end{cases}$

## 9.3. Правила дифференцирования

Постоянная

$$(C)' = 0.$$

Сумма и разность

$$(u + v - w)' = u' + v' - w'.$$

Произведение

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Отношение

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Степень

$$(u^v)' = u^v \left( v' \ln u + v \frac{u'}{u} \right).$$

Обратные функции:

$$y = f(x); \quad x = g(y); \quad f'(x) = \frac{1}{g'(y)} \Big|_{y=f(x)}.$$

Сложные функции:

$$y = f(u); \quad u = u(x); \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = f'(u)u';$$

$$z = F(x, y), \quad x = x(t), \quad y = y(t);$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

Функция, заданная уравнением  $F(x, y) = 0$ :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y} \quad (\text{при } F'_y \neq 0).$$

Функция, заданная параметрически:

$$x = x(t), \quad y = y(t); \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y'(x)}{x'(x)} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3}.$$

Производные высших порядков

$$(u + v - w)^{(n)} = u^{(n)} + v^{(n)} - w^{(n)}; \quad (Au)^{(n)} = Au^{(n)};$$

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + C_n^1 u^{(n-1)}v' + C_n^2 u^{(n-2)}v'' + \dots + uv^{(n)},$$

где  $C_n^m$  — биномиальные коэффициенты.

## 9.4. Графическое дифференцирование

Функция  $y = f(x)$  задана графически. Построение графика функции  $Y = f'(x)$  производится так (рис. 9.2).

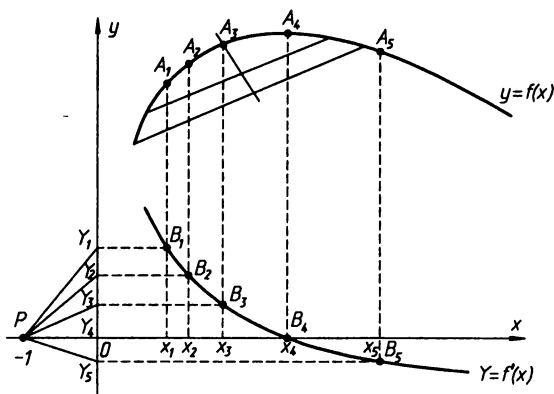


Рис. 9.2

1. Из полюса  $P(-1, 0)$  проводим пучок лучей до встречи с осью ординат в точках  $Y_1, Y_2, Y_3, \dots$

2. Для каждого луча пучка строим пару параллельных ему хорд кривой  $y = f(x)$ ; через середины хорд проводим прямую до встречи с кривой. На кривой получаем точки  $A_1, A_2, A_3, \dots$ , в которых касательные к кривой имеют угловые коэффициенты, равные соответственно  $Y_1, Y_2, Y_3, \dots$  (на рис. 9.2 указано построение только точки  $A_3$ ).

3. Если  $x_k$  есть абсцисса точки  $A_k$ , то  $f'(x_k) = Y_k$ . Поэтому точки  $B_k(x_k, Y_k)$  лежат на искомой кривой  $Y = f'(x)$ . Построив достаточно много точек  $B_k$ , соединяем их плавной линией.

## 9.5. Основные теоремы дифференциального исчисления

Для справедливости нижеследующих формул достаточно, чтобы входящие в них производные существовали на отрезке  $[a, x]$ .

Формула конечных приращений:

$$f(x) - f(a) = f'(\xi)(x - a).$$

Формула Коши:

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \quad g'(\xi) \neq 0.$$

Формула Тейлора:

$$f(x) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + R_n$$

или

$$\Delta y = dy + \frac{1}{2!}d^2y + \dots + \frac{1}{n!}d^ny + R_n,$$

где  $h = x - a = \Delta x$ ;  $R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}h^{n+1}$ .

В этих формулах  $\xi$  — некоторая промежуточная точка между  $a$  и  $x$ .

Формула Тейлора для функции двух переменных:

$$F(x, y) = F(a, b) + [F'_x(a, b)h + F'_y(a, b)k] + \frac{1}{2!}[F''_{xx}(a, b)h^2 + 2F''_{xy}(a, b)hk + F''_{yy}(a, b)k^2] + \dots + \frac{1}{n!}d^n F(a, b) + R_n,$$

где  $h = x - a = \Delta x$ ;  $k = y - b = \Delta y$ ;  $R_n = \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}F(\xi, \eta)$ ;  $(a \dots \xi \dots x; b \dots \eta \dots y)$ .

## 9.6. Вычисление пределов (раскрытие «неопределенностей»)

**1. Вычисление предела отношения.** Если при  $x \rightarrow a$  или  $x \rightarrow \infty$  пределы  $f(x)$  и  $g(x)$  одновременно равны 0 или  $\infty$  и если  $\lim_{x \rightarrow a \text{ или } x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  существует, то

$$\lim_{x \rightarrow a \text{ или } x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a \text{ или } x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (x \rightarrow a \text{ или } x \rightarrow \infty).$$

**Примеры.**

Сравнение скорости роста степенной показательной и логарифмической функций.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{nx^{n-1}} = 0 \quad (n > 0).$$

Раскрытие «неопределенностей» видов  $\infty \cdot 0$ ,  $\infty - \infty$ ,  $1^\infty$ ,  $0^0$ ,  $\infty^0$  приводится к вычислению предела отношения при помощи алгебраических преобразований.

**Примеры.**

$$\lim_{x \rightarrow +0} x \ln x = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x^{-1}}{-x^{-2}} = 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} (x)^x = \lim_{x \rightarrow +0} (e^{\ln x})^x = e^{\lim_{x \rightarrow +0} x \ln x} = e^0 = 1.$$

### 2. Некоторые важные пределы.

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1 \quad (x \text{ — в радианах});$$

$$2. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e;$$

$$3. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1;$$

$$4. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1;$$

$$5. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}} = 1;$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{q_0 x^m + q_1 x^{m-1} + \dots + q_m}{p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + \dots + p_n} = \begin{cases} \infty & \text{при } m > n \\ \frac{q_0}{p_0} & \text{при } m = n; \\ 0 & \text{при } m < n \end{cases}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} (p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + \dots + p_n) = 0.$$

## 9.7. Наибольшие и наименьшие значения

*Правило нахождения наибольшего и наименьшего значений непрерывной функции  $f(x)$  на отрезке  $[a; b]$ :*

1. Найти те точки отрезка  $[a; b]$ , в которых производная  $f'(x)$  равна нулю или не существует.

2. Вычислить значения функции  $f(x)$  во всех найденных точках, сравнив их между собой, а также со значениями функции на концах отрезка, выбрать наибольшее и наименьшее значения.

### Пример.

Найти наибольшее и наименьшее значения функции  $f(x) = x^2 e^{-x}$  на отрезке  $[-1; 3]$ .

Находим  $f'(x) = (-x^2 + 2x)e^{-x}$ ;  $f'(x) = 0$  при  $x = 0$ ; 2. Вычисляем:  $f(0) = 0$ ;  $f(2) = 0,541$ ;  $f(-1) = e = 2,718$ ;  $f(3) = 0,448$ . Наименьшее значение функции  $x^2 e^{-x}$  на отрезке  $[-1; 3]$  есть 0, наибольшее —  $e$ .

### Точки максимума и минимума

Точка  $x_0$  называется точкой максимума (минимума) функции  $f(x)$ , если значение  $f(x_0)$  является наибольшим (наименьшим) значением функции в некоторой окрестности этой точки. Для дифференцируемой функции  $f(x)$  возможные точки максимума и минимума находятся из уравнения  $f'(x_0) = 0$ .

Исследование возможных точек максимума или минимума по знаку второй производной:

если  $f''(x_0) > 0$ , то  $f(x_0)$  — минимум;

если  $f''(x_0) < 0$ , то  $f(x_0)$  — максимум.

Для функции двух переменных  $z = F(x, y)$  возможные точки максимума и минимума  $(x_k, y_k)$  находятся из системы уравнений:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = F'_x(x, y) = 0; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = F'_y(x, y) = 0.$$

Найденные точки исследуются по знаку выражения:

$$\delta = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 = F''_{xx}(x_k, y_k) F''_{yy}(x_k, y_k) - [F''_{xy}(x_k, y_k)]^2.$$

Если  $\delta > 0$  и  $F''_{xx}(x_k, y_k) > 0$ , то  $F(x_k, y_k)$  — минимум.

Если  $\delta > 0$  и  $F''_{xx}(x_k, y_k) < 0$ , то  $F(x_k, y_k)$  — максимум.

Если  $\delta < 0$ , то  $F(x_k, y_k)$  не является ни максимумом, ни минимумом [максимумом для одних сечений поверхности  $z = F(x, y)$ , минимумом — для других];  $(x_k, y_k)$  — точка минимакса.

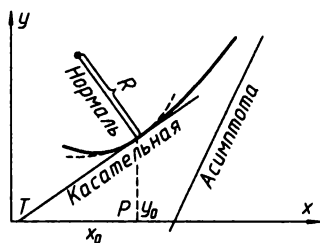


Рис. 9.3

Случай  $\delta = 0$  требует специального исследования.

Таблица 9.3

Приложения к плоским кривым

Уравнение кривой	$y = f(x)$	$F(x, y) = 0$	$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$
Уравнение касательной	$y - y_0 = y'_0(x - x_0)$ , где $y_0 = f(x_0)$ ; $y'_0 = f'(x_0)$	$F'_x \cdot (x - x_0) + F'_y \cdot (y - y_0) = 0$ , где $F(x_0, y_0) = 0$ ; $F'_x = F'_x(x_0, y_0)$ ; $F'_y = F'_y(x_0, y_0)$	$\frac{x - x_0}{x_0} = \frac{y - y_0}{y_0}$ , где $x_0 = x(t_0)$ ; $y_0 = y(t_0)$ ; $\dot{x}_0 = x'(t_0)$ ; $\dot{y}_0 = y'(t_0)$
Уравнение нормали	$y - y_0 = -\frac{1}{y'_0}(x - x_0)$	$\frac{x - x_0}{F'_x} = \frac{y - y_0}{F'_y}$	$\dot{x}_0(x - x_0) + \dot{y}_0(y - y_0) = 0$
Длина подкасательной РТ	$\left  \frac{y_0}{y'_0} \right $	$\left  y_0 \frac{F'_y}{F'_x} \right $	$\left  y_0 \frac{\dot{x}_0}{\dot{y}_0} \right $
Радиус кривизны R	$\frac{[1 + (y')^2]^{3/2}}{y''}$	$\frac{(F'^2_x + F'^2_y)^{3/2}}{\begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} & F'_x \\ F''_{xy} & F''_{yy} & F'_y \\ F'_x & F'_y & 0 \end{vmatrix}}$	$\frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}{\begin{vmatrix} \ddot{x} & \ddot{y} \\ \dot{x} & \dot{y} \end{vmatrix}}$
Параметры асимптоты $y = kx + b$	$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x}$ ; $b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - kx)$		$k = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t)}{x(t)}$ ; $b = \lim_{t \rightarrow t_0} [y(t) - kx(t)]$ , если $x(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow t_0$

## 10. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

### 10.1. Таблица основных неопределенных интегралов

Основные неопределенные интегралы

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где  $F'(x) = f(x)$ , а  $C$  — произвольное постоянное число, представ-  
лены в табл. 10.1.

Таблица 10.1

$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
Показательные функции		Тригонометрические функции		Гиперболические функции	
$e^{\lambda x}$	$\frac{1}{\lambda} e^{\lambda x}$	$\sin \omega x$	$-\frac{1}{\omega} \cos \omega x$	$\operatorname{sh} ax$	$\frac{1}{a} \operatorname{ch} ax$
$a^x$	$\frac{1}{\ln a} a^x$	$\cos \omega x$	$\frac{1}{\omega} \sin \omega x$	$\operatorname{ch} ax$	$\frac{1}{a} \operatorname{sh} ax$
Степенные функции		$\operatorname{tg} x$	$-\ln  \cos x $	$\operatorname{th} x$	$\ln \operatorname{ch} x$
$x^m (m \neq -1)$	$\frac{x^{m+1}}{m+1}$	$\operatorname{ctg} x$	$\ln  \sin x $	$\operatorname{cth} x$	$\ln  \operatorname{sh} x $
$\frac{1}{x}$	$\ln  x $	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x$	$\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$	$-\operatorname{cth} x$
Простейшие дроби		$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	$\operatorname{th} x$
$\frac{1}{x^2 + a^2}$	$\frac{1}{a} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{a}$	$\frac{1}{\sin x}$	$\ln \left  \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right $	$\frac{1}{\operatorname{sh} x}$	$\ln \left  \operatorname{th} \frac{x}{2} \right $
$\frac{1}{x^2 - a^2}$	$\frac{1}{2a} \ln \left  \frac{x-a}{x+a} \right $	$\frac{1}{\cos x}$	$\ln \left  \operatorname{tg} \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right $	$\frac{1}{\operatorname{ch} x}$	$2 \operatorname{arctg} e^x$
$\frac{x}{x^2 \pm a^2}$	$\frac{1}{2} \ln  x^2 \pm a^2 $	$\frac{1}{1 + \cos x}$	$\operatorname{tg} \frac{x}{2}$	$\operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x$	$\frac{1}{4} \operatorname{ch} 2x$

Простейшие иррациональности

$\frac{1}{\sqrt{ax+b}}$	$\frac{2}{a} \sqrt{ax+b}$	$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\operatorname{arc} \sin \frac{x}{a}$	$\frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$	$\ln (x + \sqrt{x^2 \pm a^2})$
$\sqrt{ax+b}$	$\frac{2}{3a} (\sqrt{ax+b})^3$	$\frac{1}{x\sqrt{x^2-a^2}}$	$\frac{1}{a} \operatorname{arc} \cos \frac{a}{x}$	$\frac{1}{x\sqrt{a^2 \pm x^2}}$	$-\frac{1}{a} \ln \left( \frac{a + \sqrt{a^2 \pm x^2}}{x} \right)$
$\frac{x}{\sqrt{ax^2+b}}$	$\frac{1}{a} \sqrt{ax^2+b}$	$\frac{1}{x^2 \sqrt{ax^2+b}}$	$-\frac{\sqrt{ax^2+b}}{bx}$	$\frac{1}{(ax^2+b)^{3/2}}$	$\frac{x}{b\sqrt{ax^2+b}}$

## 10.2. Общие правила интегрирования

Вынесение постоянного множителя за знак  $\int$ :

$$\int A f(x) dx = A \int f(x) dx \quad (A \neq 0).$$

Интегрирование суммы:

$$\int (u + v + w) dx = \int u dx + \int v dx - \int w dx.$$

Интегрирование по частям:

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Замена переменной (подстановка).

Если  $x = \varphi(t)$ ,  $t = \psi(x)$ , то  $\int f(x) dx = \int [f(\varphi(t))] \varphi'(t) dt$ ,

где после интегрирования надо заменить  $t$  на  $\psi(x)$ .

## 10.3. Интегрирование рациональных функций

Для интегрирования дробно-рациональной функции ее разлагают на целую часть и простейшие дроби.

Интегралы от простейших дробей:

$$\int \frac{A}{x-a} dx = A \ln|x-a| + C;$$

$$\int \frac{A}{(x-a)^k} dx = -\frac{A}{k-1} \frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C \quad (k > 1);$$

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx = \frac{M}{2} \ln(x^2+px+q) + \frac{N-\frac{Mp}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} \operatorname{arctg} \frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C;$$

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k} dx = \frac{M}{2(k-1)} \frac{1}{(x^2+px+q)^{k-1}} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k} \quad (k > 1).$$

Последний интеграл вычисляют по формуле понижения степени  $k$ :

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k} &= \frac{x+\frac{p}{2}}{2(k-1)\left(q-\frac{p^2}{4}\right)(x^2+px+q)^{k-1}} + \\ &+ \frac{2k-3}{2k-2} \cdot \frac{1}{q-\frac{p^2}{4}} \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^{k-1}}. \end{aligned}$$

## 10.4. Интегрирование иррациональных функций

Если подинтегральная функция рационально ( $R$ ) зависит от  $x$  и от  $\sqrt[n]{ax+b}$  или  $\sqrt{\pm x^2+px+q}$ , то интеграл приводится к интегралу от рациональной функции при помощи подстановок (табл. 10.2).

Таблица 10.2

Интеграл	Подстановка
$\int R(x, \sqrt[n]{ax+b}) dx$	$\sqrt[n]{ax+b}=t; \quad x=\frac{1}{a}(t^n-b), \quad dx=\frac{n}{a}t^{n-1} dt$
$\int R(x, \sqrt[n]{ax+b}, \sqrt[m]{ax+b}, \dots) dx$	$\sqrt[n]{ax+b}=t$ , где $N$ — общее наименьшее кратное чисел $n, m, \dots$
$\int R\left(x, \sqrt{\frac{ax+b}{x+c}}\right) dx$	$\sqrt{\frac{ax+b}{x+c}}=t; \quad x=\frac{-ct^n+b}{t^n-a}; \quad dx=\frac{(ac-b)nt^{n-1}}{(t^n-a)^2} dt$
$\int R(x, \sqrt{-x^2+px+q}) dx$	$\sqrt{-x^2+px+q}=t(x-\alpha)$ , где $\alpha=\frac{p}{2} \mp \sqrt{\frac{p^2}{4}+q}$ ; $x=\alpha \pm \frac{\sqrt{p^2+4q}}{t^2+1}; \quad dx=\mp \frac{2\sqrt{p^2+4q}t}{(t^2+1)^2} dt$
$\int R(x, \sqrt{x^2+px+q}) dx$	$\sqrt{x^2+px+q}=t-x; \quad x=\frac{t^2-q}{2t+p}; \quad dx=\frac{2(t^2+pt+q)}{(2t+p)^2} dt$

Интеграл от биномного дифференциала  $\int x^m(ax+bx^n)^p dx$  выражается в элементарных функциях только в трех случаях (табл. 10.3).

Таблица 10.3

Случаи интегрируемости	Подстановка
$p$ — целое, $m, n$ — рациональные	$x=t^N$ , где $N$ — общее наименьшее кратное знаменателей чисел $m$ и $n$ .
$\frac{m+1}{n}$ — целое, $p=\frac{r}{s}$ — рациональное	$ax+bx^n=t^s; \quad x^m dx=\frac{s}{bn}\left(\frac{t^s-a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}} t^{s-1} dt$
$\frac{m+1}{n}+p$ — целое, $p=\frac{r}{s}$ — рациональное	$ax^{-n}+b=t^s; \quad x^{m+np} dx=\frac{-s}{an}\left(\frac{t^s-b}{a}\right)^{-\left(\frac{m+1}{n}+p\right)-1} t^{s-1} dt$

Некоторые интегралы от иррациональных функций:

$$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{x^2+px+q}} dx = A\sqrt{x^2+px+q} + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \ln \left(x + \frac{p}{2} + \sqrt{x^2+px+q}\right) + C;$$

$$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{-x^2+px+q}} dx = -A\sqrt{-x^2+px+q} + \left(B + \frac{Ap}{2}\right) \arcsin \frac{2x-p}{\sqrt{4q+p^2}} + C;$$

$$\int \sqrt{x^2+px+q} dx = \frac{2x+p}{4} \sqrt{x^2+px+q} + \frac{4q-p^2}{8} \ln \left(x + \frac{p}{2} + \sqrt{x^2+px+q}\right) + C;$$

$$\int \sqrt{-x^2+px+q} dx = \frac{2x-p}{4} \sqrt{-x^2+px+q} + \frac{4q+p^2}{8} \arcsin \frac{2x-p}{\sqrt{4q+p^2}} + C.$$

## 10.5. Интегрирование тригонометрических функций

Если подинтегральная функция рационально ( $R$ ) зависит от  $\sin x$  и  $\cos x$ , то интеграл  $\int R(\sin x, \cos x) dx$  приводится к интегралу от рациональной функции при помощи *универсальной подстановки*:

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t; \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}; \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}; \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt.$$

В отдельных случаях к более простым интегралам приводят *специальные подстановки*:

1.  $\sin x = t$ ;  $\cos^2 x = 1 - t^2$ ;  $\cos x dx = dt$ , применяется в том случае, когда  $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ ;

2.  $\cos x = t$ ;  $\sin^2 x = 1 - t^2$ ;  $\sin x dx = -dt$ , применяется в том случае, когда  $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ ;

3.  $\operatorname{tg} x = t$ ;  $\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$ ;  $\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$ ;  $\sin x \cos x = \frac{t}{1+t^2}$ ;  $dx = \frac{t}{1+t^2} dt$ , применяется в том случае, когда  $R(-\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x) = = R_1(\operatorname{tg} x)$ .

**Пример.**

$$\int \sin^n x \cos^{2m+1} x dx = \int t^n (1-t^2)^m dt, \quad t = \sin x.$$

## 1. Специальные приемы понижения степени:

Удвоение аргумента в интегралах типа

$$\int \sin^{2n} x \cos^{2m} x \, dx = \frac{1}{2^{n \cdot m}} \int (1 - \cos 2x)^n \cdot (1 + \cos 2x)^m \, dx.$$

Применение формулы  $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$  в интегралах типа

$$\int \frac{dx}{\sin^n x \cos^m x} = \int \frac{dx}{\sin^{n-2} x \cos^m x} + \int \frac{dx}{\sin^n x \cos^{m-2} x}.$$

## 2. Некоторые интегралы от тригонометрических функций

(при  $|a| \neq |b|$ ).

$$\int \sin ax \sin bx \, dx = \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)} + C;$$

$$\int \cos ax \cos bx \, dx = \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} + \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)} + C;$$

$$\int \sin ax \cos bx \, dx = -\frac{\cos(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\cos(a+b)x}{2(a+b)} + C;$$

$$\int \sin^2 ax \, dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4a} \sin 2ax + C;$$

$$\int \cos^2 ax \, dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4a} \sin 2ax + C;$$

$$\int x^n \sin x \, dx = -x^n \cos x + n \int x^{n-1} \cos x \, dx;$$

$$\int x^n \cos x \, dx = x^n \sin x - n \int x^{n-1} \sin x \, dx.$$

## 10.6. Интегралы от других трансцендентных функций

$$\int f(e^x) \, dx = \int f(t) \frac{1}{t} \, dt; \quad t = e^x;$$

$$\int x^n e^x \, dx = e^x [x^n - nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2} - \dots + (-1)^n n!] + C;$$

$$\int e^{\lambda x} \sin \omega x \, dx = \frac{e^{\lambda x}}{\lambda^2 + \omega^2} (\lambda \sin \omega x - \omega \cos \omega x) + C = \frac{e^{\lambda x}}{\sqrt{\lambda^2 + \omega^2}} \sin(\omega x - \varphi) + C,$$

где  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega}{\lambda}$ ;

$$\begin{aligned} \int e^{\lambda x} \cos \omega x \, dx &= \frac{e^{\lambda x}}{\lambda^2 + \omega^2} (\lambda \cos \omega x + \omega \sin \omega x) + C = \\ &= \frac{e^{\lambda x}}{\sqrt{\lambda^2 + \omega^2}} \cos(\omega x - \varphi) + C, \end{aligned}$$

где  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega}{\lambda}$ ;

$$\int f(\ln x) \frac{dx}{x} = \int f(t) dt, \quad t = \ln x; \quad \int \ln x \, dx = x \ln x - x + C;$$

$$\int x^n \ln x \, dx = x^{n+1} \left[ \frac{\ln x}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} \right] + C;$$

$$\int \arcsin x \, dx = \frac{\pi}{2} x - \int \arccos x \, dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C;$$

$$\int \operatorname{arctg} x \, dx = \frac{\pi}{2} x - \int \operatorname{arcctg} x \, dx = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.$$

## 10.7. Определенный интеграл

Определенный интеграл от функции  $f(x)$  в пределах от  $a$  до  $b$  есть предел интегральной суммы

$$\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_{k-1},$$

где (см. рис. 10.1)

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b;$$

$$\Delta x_{k-1} = x_k - x_{k-1}; \quad x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k;$$

$$\delta = \max |\Delta x_{k-1}|. \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

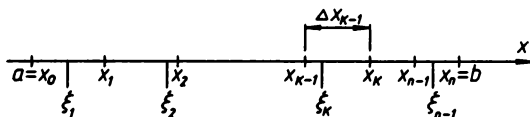


Рис. 10.1

Геометрический смысл: определенный интеграл дает площадь  $S$  криволинейной трапеции (рис. 10.2). При этом площадь считается положительной, если  $a < b$  и  $f(x) > 0$ .

Связь с неопределенным интегралом (формула Ньютона-Лейбница). Если  $F'(x) = f(x)$ , то

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_{x=a}^b = F(b) - F(a).$$

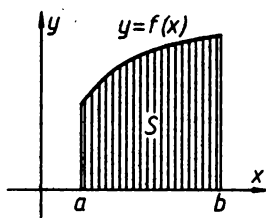


Рис. 10.2

### Основные формулы теории

Аддитивность:

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx.$$

Линейность:

$$\int_a^b [A f(x) + B g(x)] dx = A \int_a^b f(x) dx + B \int_a^b g(x) dx.$$

Оценка интеграла. Из  $f(x) \leq g(x)$  ( $a \leq x \leq b$ ) следует

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

Теоремы о среднем ( $\xi$  — промежуточная точка между  $a$  и  $b$ ): для непрерывной  $f(x)$

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) f(\xi); \quad \int_a^b f(x) p(x) dx = f(\xi) \int_a^b p(x) dx,$$

если  $p(x)$  сохраняет знак в интервале  $(a, b)$ .

Производная по верхнему пределу

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x),$$

если  $f(x)$  непрерывна.

Интегрирование по частям:

$$\int_a^b uv' dx = uv \Big|_{x=a}^b - \int_a^b u'v dx.$$

*Замена переменной интегрирования:*

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\Psi(a)}^{\Psi(b)} f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt,$$

где  $x = \varphi(t)$  непрерывно дифференцируема и монотонна;  $t = \Psi(x)$ .

*Дифференцирование по параметру:*

$$\frac{d}{dt} \int_a^b f(x, t) dx = \int_a^b \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} dx,$$

если  $\frac{\partial f(x, t)}{\partial t}$  непрерывна.

## 10.8. Таблица некоторых определенных интегралов

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha} e^{-ax} dx = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{a^{\alpha+1}}; \quad (\alpha > -1, a > 0),$$

где  $\Gamma(\alpha+1)$  — гамма-функция.

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = 1;$$

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1) \sigma^{2n};$$

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} \cos bx dx = \frac{a}{a^2 + b^2} \quad (a > 0); \quad \int_0^{\infty} e^{-ax} \sin bx dx = \frac{b}{a^2 + b^2} \quad (a > 0);$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x^{\frac{m-1}{2}} (1-x)^{\frac{n-1}{2}} dx = \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{m+n}{2} + 1\right)} \quad \left( \begin{matrix} m > 0, \\ n > 0 \end{matrix} \right);$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)} \frac{\pi}{2} = \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \frac{\pi}{2} \quad (n - \text{целое});$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx = \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx = 2 \int_0^{\infty} \cos(x^2) dx = 2 \int_0^{\infty} \sin(x^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}};$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x} dx = \frac{\pi}{2} \frac{|a|}{a};$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x \cos ax}{x} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{при } |a| < 1; \\ 0 & \text{при } |a| > 1 \end{cases};$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2} dx = \int_0^{\infty} \frac{x \sin ax}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-a} \quad (a > 0);$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = \Gamma(\alpha) \Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin \alpha \pi} \quad (0 < \alpha < 1);$$

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^n} = \frac{\pi}{n \sin \frac{\pi}{n}} \quad (n > 1).$$

## 10.9. Приближенное вычисление определенного интеграла

**1. Вычисление интеграла при помощи таблицы.** Для вычисления интеграла  $\int_a^b f(x) dx$  отрезок  $[a, b]$  разбивается на четное число  $(2n)$  равных частей точками

$$x_k = a + kh; \quad h = \frac{b-a}{2n} \quad (k=0, 1, 2, \dots, 2n)$$

и составляется таблица значений подинтегральной функции  $y_k = f(x_k)$ . Шаг расчета  $h$  выбирается настолько малым, чтобы четвертые разности  $\Delta^4 y_k$  в таблице мало менялись.

*Расчетная формула*

$$\int_a^b f(x) dx = 2h \sum_{k=0}^{n-1} \left( y_{2k+1} + \frac{1}{6} \Delta^2 y_{2k} \right),$$

где  $\Delta^2 y_{2k} = \Delta y_{2k+1} - \Delta y_{2k} = (y_{2k+2} - y_{2k+1}) - (y_{2k+1} - y_{2k})$  — вторая разность функции в таблице.

Погрешность расчетной формулы приближенно равна

$$-\frac{b-a}{180} \overline{\Delta^4 y},$$

где  $\overline{\Delta^4 y}$  — среднее арифметическое значение разностей  $\Delta^4 y_k$ .

### Пример.

Организация расчета указана в приведенном ниже примере вычисления интеграла  $I = \int_{0,4}^{2,0} e^{-x^2} dx$ .

Шаг расчета  $h = 0,2$ . Плавное изменение четвертых разностей в таблице указывает на отсутствие ошибки в вычислении значений подинтегральной функции  $y = e^{-x^2}$ .

$x$	$x^2$	$y = e^{-x^2}$	$\Delta y$	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0,4	0,16	0,852				
0,6	0,36	<u>0,698</u>	-154			
			-171	<u>-17</u>		
0,8	0,64	0,527		12	29	
1,0	1,00	<u>0,368</u>	-159	<u>28</u>	16	-13
1,2	1,44	0,237	-131	35	7	-9
1,4	1,96	<u>0,141</u>	-96	<u>32</u>	-3	-10
1,6	2,56	0,077	-64	26	-6	-3
1,8	3,24	<u>0,039</u>	-38	<u>17</u>	-9	-3
2,0	4,00	0,018	-21			

Нужные значения  $y_{2k+1}$  и соответствующие разности  $\Delta^2 y_{2k}$  подчеркнуты. Их суммы равны:

$$\sum y_{2k+1} = 1,246; \quad \sum \Delta^2 y_{2k} = 60 \cdot 10^{-3} = 0,060.$$

Величина интеграла с точностью до 0,001

$$I = 0,4 \left( 1,246 + \frac{1}{6} \cdot 0,060 \right) = 0,502.$$

## 2. Вычисление интеграла при помощи степенных рядов.

Если  $f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n + \dots$ , то в области сходимости этого ряда

$$\int_a^b f(x) dx \left[ c_0 x + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 \frac{x^3}{3} + \dots + c_n \frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_{x=a}^b$$

При вычислении берут достаточное число первых членов ряда, чтобы его остаток был меньше допустимой погрешности.

**Пример.**

Найти  $I = \int_0^{0,4} e^{-x^2} dx$  с точностью до 0,001.

$$\int_0^{0,4} \left( 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots \right) dx = \left[ x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \frac{x^7}{42} + \dots \right]_{x=0}^{0,4} =$$
$$= (0,4000 - 0,0213 + 0,0010) = 0,380.$$

Здесь достаточно ограничиться тремя первыми членами, так как четвертый член меньше 0,0001.

**3. Графическое интегрирование.** Функция  $y = f(x)$  задана графически. Построение интегральной кривой  $Y = \int_a^x f(x) dx$  производится так (рис. 10.3):

1. Проводим вертикальные прямые в любых точках  $a, x_1, x_2, x_3, \dots$  до встречи с кривой  $y = f(x)$ .
2. Проводим горизонтальные прямые  $y = k_1, k_2, k_3, \dots$  так, чтобы площади заштрихованных участков выше и ниже этих прямых были приблизительно равны.
3. Соединяем точки  $k_1, k_2, k_3, \dots$  оси ординат с полюсом  $P(-1; 0)$ .
4. Проводим прямую из точки  $(a, 0)$  параллельно  $Pk_1$  до встречи в точке  $A_1$  с прямой  $x = x_1$ ; затем строим прямую из точки  $A_1$  параллельно  $Pk_2$  до встречи в точке  $A_2$  с прямой  $x = x_2$  и т. д. Точки  $A_1, A_2, A_3, \dots$  лежат на искомой интегральной кривой.

Примечание. Чем больше кривизна кривой  $y = f(x)$ , тем меньше надо брать интервалы между точками  $x_k$ .

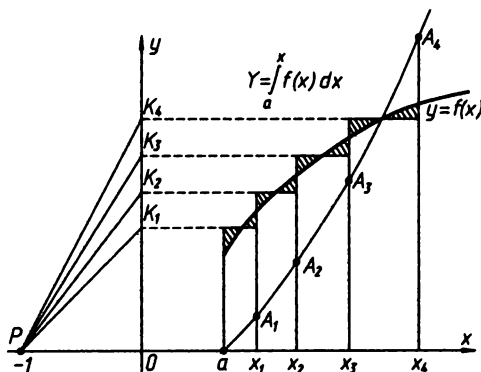


Рис. 10.3

## 10.10. Кратные и криволинейные интегралы. Геометрические приложения интегралов

**1. Криволинейный интеграл.** Интеграл от функции  $f(x, y, z)$  по кривой  $(L)$  есть предел интегральной суммы:

$$\int_L f(x, y, z) ds = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta s_k,$$

где  $\Delta s_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) — длины дуг, на которые разбита кривая  $L$ ;  $\delta$  — наибольшая из длин дуг  $\Delta s_k$ ;  $(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$  — произвольная точка на  $k$ -й дуге (рис. 10.4, а).

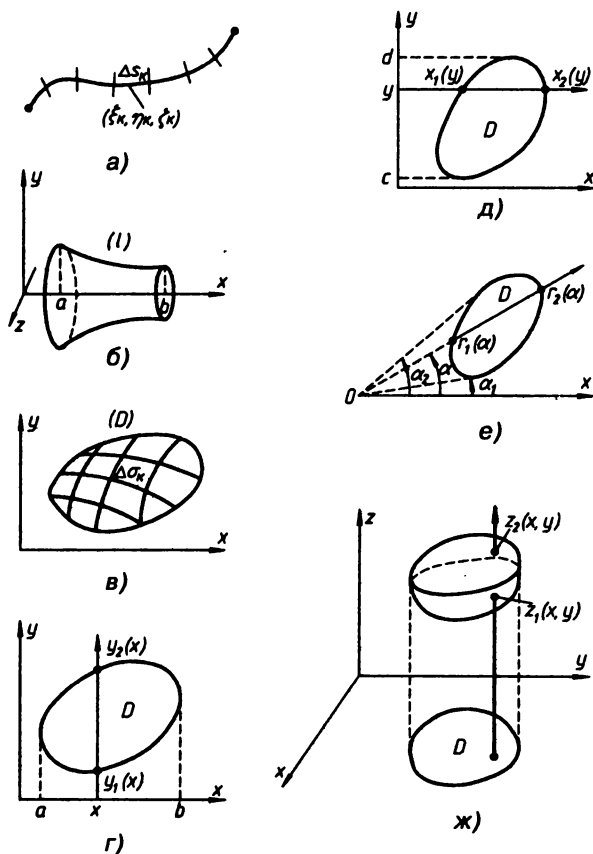


Рис. 10.4

### Вычисление криволинейного интеграла.

Если дуга ( $L$ ) дана параметрическими уравнениями  $x = x(t)$ ;  $y = y(t)$ ;  $z = z(t)$ , причем параметр  $t$  изменяется от  $t_1$  до  $t_2$ , то

$$\int_L f(x, y, z) ds = \int_{t_1}^{t_2} f[x(t), y(t), z(t)] \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)} dt.$$

Длина кривой  $L$

$$l = \int_L ds = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)} dt.$$

Длина плоской кривой:

в декартовых координатах  $x = x$ ;  $y = f(x)$  ( $a \leq x \leq b$ )

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx;$$

в полярных координатах  $x = r(\alpha) \cos \alpha$ ;  $y = r(\alpha) \sin \alpha$  ( $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$ )

$$l = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sqrt{r^2(\alpha) + [r'(\alpha)]^2} d\alpha.$$

Площадь поверхности вращения плоской кривой ( $L$ ) вокруг оси  $Ox$ , не пересекающей кривой (рис. 10.4,б),

$$\begin{aligned} Q &= 2\pi \int_L y ds = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = \\ &= 2\pi \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} r(\alpha) \sin \alpha \sqrt{r^2 + r'^2} d\alpha. \end{aligned}$$

**2. Двойной интеграл.** Двойной интеграл от функции  $f(x, y)$  по плоской области ( $D$ ) есть предел интегральной суммы

$$\int_D f(x, y) d\sigma = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta\sigma_k,$$

где  $\Delta\sigma_k$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ) — площади участков, на которые разбита область  $D$ ;  $\delta$  — наибольший из диаметров участков;  $(\xi_k, \eta_k)$  — произвольная точка на  $k$ -м участке (рис. 10.4,в).

### Вычисление двойного интеграла

В декартовых координатах ( $d\sigma = dx dy$ ) (рис. 10.4,г)

$$\int_D f(x, y) d\sigma = \iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$$

или (рис. 10.4,д)

$$\int_D f(x, y) d\sigma = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx.$$

В полярных координатах ( $x = r \cos \alpha$ ;  $y = r \sin \alpha$ ;  $d\sigma = r dr d\alpha$ ) (рис. 10.4,е)

$$\int_D f(x, y) d\sigma = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} d\alpha \int_{r_1(\alpha)}^{r_2(\alpha)} f(r \cos \alpha, r \sin \alpha) r dr.$$

### Площадь плоской области

$$S = \int_D d\sigma = \iint_D dx dy = \iint_{D^*} r dr d\alpha,$$

где ( $D^*$ ) — область ( $D$ ) в полярных координатах.

**3. Интеграл по поверхности.** Интеграл от функции  $f(x, y, z)$  по поверхности ( $S$ ) есть предел интегральной суммы

$$\int_S f(x, y, z) dS = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta S_k,$$

где  $\Delta S_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) — площади участков, на которые разбита поверхность  $S$ ;  $\delta$  — наибольший из диаметров участков  $\Delta S_k$ ;  $(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$  — произвольная точка на  $k$ -м участке.

### Вычисление интеграла по поверхности

Если поверхность пересекается каждой прямой, параллельной оси  $Oz$ , не более, чем в одной точке, то

$$\int_S f(x, y, z) dS = \iint_D f[x, y, z(x, y)] \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy,$$

где  $z = z(x, y)$  — уравнение поверхности ( $S$ ); ( $D$ ) — проекция поверхности ( $S$ ) на плоскость  $xOy$ .

Вычисление интеграла по цилиндрической поверхности с образующими, параллельными оси  $Oz$  и направляющей  $L$  на плоскости  $xOy$

$$\int_S f(x, y, z) dS = \int_L \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

В частности, для круглого цилиндра ( $x=r_0 \cos \alpha$ ;  $y=r_0 \sin \alpha$ ;  $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$ ;  $r_0 = \text{const}$ )

$$\int_S f(x, y, z) dS = r_0 \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} d\alpha \int_{z_1(\alpha)}^{z_2(\alpha)} f(r_0 \cos \alpha; r_0 \sin \alpha; z) dz.$$

Вычисление интеграла по сферической поверхности ( $x=R_0 \sin \vartheta \cos \alpha$ ;  $y=R_0 \sin \vartheta \sin \alpha$ ;  $z=R_0 \cos \vartheta$ ;  $R_0 = \text{const}$ ):

$$\int_S f(x, y, z) dS = R_0^2 \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} d\alpha \int_{\vartheta_1(\alpha)}^{\vartheta_2(\alpha)} f(x, y, z) \sin \vartheta d\vartheta.$$

**4. Тройной интеграл.** Тройной интеграл от функции  $f(x, y, z)$  по объему ( $V$ ) есть предел интегральной суммы

$$\int_V f(x, y, z) dV = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta V_k,$$

где  $\Delta V_k$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ) — объемы участков, на которые разбит объем  $V$ ;  $\delta$  — наибольший из диаметров участков;  $(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$  — произвольная точка на  $k$ -м участке.

*Вычисление тройного интеграла*

В декартовых координатах ( $dV = dx dy dz$ ) (рис. 10.4, ж)

$$\int_V f(x, y, z) dV = \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

В цилиндрических координатах ( $x=r \cos \alpha$ ;  $y=r \sin \alpha$ ;  $z=z$ )  $dV = r dr d\alpha dz$ )

$$\int_V f(x, y, z) dV = \iint_{D^*} r dr d\alpha \int_{z_1(r, \alpha)}^{z_2(r, \alpha)} f(r \cos \alpha, r \sin \alpha, z) dz$$

или

$$\int_V f(x, y, z) dV = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} d\alpha \iint_{Q_\alpha} f(r \cos \alpha, r \sin \alpha, z) r dr dz$$

где  $Q_\alpha$  — сечение поверхности плоскостью  $\alpha = \text{const}$ .

В цилиндрических координатах ( $x = R \sin \vartheta \cos \alpha$ ;  $y = R \sin \vartheta \sin \alpha$ ;  $z = R \cos \vartheta$ ;  $dV = R^2 \sin \vartheta dR d\vartheta d\alpha$ )

$$\begin{aligned} & \int_V f(x, y, z) dV = \\ &= \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} d\alpha \iint_{Q_\alpha} f(R \sin \vartheta \cos \alpha, R \sin \vartheta \sin \alpha, R \cos \vartheta) R^2 \sin \vartheta dR d\vartheta. \end{aligned}$$

## 11. РЯДЫ

### 11.1. Числовые ряды

Обозначение

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_k + \dots$$

Частная сумма:

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

Остаток ряда:

$$r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots$$

Сходимость ряда — существование предела  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$  (сумма ряда).

Необходимое условие сходимости:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Для сходящихся рядов остаток ряда дает погрешность приближения частных сумм  $s_n$  к сумме ряда  $s$ :

$$s - s_n = r_n; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0.$$

Во многих случаях оценку остатка ряда удобно производить путем сравнения его с геометрической прогрессией, члены которой больше членов данного ряда.

Для знакопеременующегося ряда

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots (-1)^{n-1} a_n + \dots \quad (a_n > 0, \quad a_n > a_{n+1}, \quad \lim a_n = 0);$$

оценка остатка дается формулой

$$|r_n| < a_{n+1}.$$

### 11.2. Степенные ряды

Степенной ряд

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n + \dots$$

Область сходимости — интервал  $-R < x < R$  (для комплексных  $x$  — круг  $|x| < R$ ).

**Вычисление радиуса сходимости:**

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|}, \quad \text{или} \quad R = 1: \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|},$$

если существует один из указанных пределов.

В каждой точке области сходимости ряд сходится абсолютно. Оценка остатка ряда внутри области сходимости (при  $|x| \leq \rho < R$ ):

$$\begin{aligned} |r_n(x)| &= |c_{n+1}x^{n+1} + c_{n+2}x^{n+2} + \dots| \leq \\ &\leq |c_{n+1}| \rho^{n+1} + |c_{n+2}| \rho^{n+2} + \dots \end{aligned}$$

**Умножение степенных рядов (в общей области сходимости):**

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \dots + a_k b_0) x^k.$$

Сумма  $f(x)$  степенного ряда непрерывна и дифференцируема неограниченное количество раз во всей области сходимости.

Производные от  $f(x)$  находят при помощи почленного дифференцирования ряда, например:

$$f'(x) = c_1 + 2c_2 x + \dots + nc_n x^{n-1} + \dots;$$

$$f''(x) = 2c_2 + 3 \cdot 2c_3 x + \dots + n(n-1)c_n x^{n-2} + \dots$$

# **1. Выражение коэффициентов ряда через его сумму:**

$$c_0 = f(0); \quad c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Для разложения функции  $f(x)$  в степенной ряд по степеням  $(x - x_0)$ :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k$$

надо сделать замену  $x = x_0 + t$ , полученную функцию разложить в степенной ряд по степеням  $t$  и затем подставить  $t = x - x_0$ .

Первые члены степенного ряда дают *приближенные формулы* для вычисления соответствующих функций.

**Пример.**

$$\sqrt{a^2 + b} = a \sqrt{1 + \frac{b}{a^2}} \approx a \left( 1 + \frac{b}{2a^2} \right) = a + \frac{b}{2a}.$$

## 2. Разложение функций в степенные ряды (табл. 11.1).

Таблица 11.1

Функция	Разложение в ряд	Область сходимости
$(1+x)^m$	$1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots$	$ x  < 1$
$\sqrt{1+x}$	$1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 + \dots$	$-1 \leq x \leq 1$
$\frac{1}{\sqrt{1+x}}$	$1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 \dots$	$-1 < x \leq 1$
$e^x$	$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$	$ x  < \infty$
$\sin x$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$	$ x  < \infty$
$\cos x$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$	$ x  < \infty$
$\operatorname{sh} x$	$x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$	$ x  < \infty$
$\operatorname{ch} x$	$1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$	$ x  < \infty$
$\operatorname{tg} x$	$x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} + \dots$	$ x  < \frac{\pi}{2}$
$\operatorname{ctg} x$	$\frac{1}{x} - \left\{ \frac{x}{3} + \frac{x^3}{45} + \frac{2x^5}{945} + \frac{x^7}{4725} + \dots \right\}$	$0 <  x  < \pi$
$\arcsin x$	$x + \frac{1x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots (2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$	$-1 \leq x \leq 1$
$\operatorname{arctg} x$	$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$	$-1 \leq x \leq 1$
$\ln(1+x)$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots$	$-1 < x \leq 1$
$\ln \frac{1+x}{1-x}$	$2 \left( x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots \right)$	$ x  < 1$

### 11.3. Тригонометрические ряды (ряды Эйлера-Фурье)

*Гармонический анализ* — разложение функции в ряд по простым гармоникам.

Если периодическая функция  $f(x)$  с периодом  $T$  кусочно-непрерывна и кусочно-монотонна (т. е. интервал  $(0; T)$  можно разложить на конечное число частей, в каждом из которых  $f(x)$  непрерывна, ограничена и монотонна), то в точках ее непрерывности

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega x + b_k \sin k\omega x) = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \sin(k\omega x + \varphi_k), \end{aligned}$$

где

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos k\omega x \, dx; \quad b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin k\omega x \, dx;$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}; \quad \operatorname{tg} \varphi_k = \frac{a_k}{b_k}.$$

В точках разрыва функции  $f(x)$  ряд сходится к  $\frac{1}{2}[f(x-0) + f(x+0)]$ , где  $f(x-0)$  и  $f(x+0)$  — левый и правый пределы функции  $f(x)$  в точке  $x$ .

Для четной функции  $f(x) = f(-x)$

$$a_k = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(x) \cos k\omega x \, dx; \quad b_k = 0.$$

Для нечетной функции  $f(x) = -f(-x)$

$$a_k = 0; \quad b_k = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(x) \sin k\omega x \, dx.$$

Если сверх того  $f\left(x + \frac{T}{2}\right) = -f(x)$ , то  $a_{2k} = b_{2k} = 0$ , т. е. в разложении остаются только косинусы или синусы нечетных дуг.

**1. Разложение в ряд Эйлера-Фурье некоторых функций.**  
Коэффициенты Эйлера-Фурье для функции (рис. 11.1)

$$y = \begin{cases} \frac{b-a}{\beta-\alpha}x + \frac{a\beta-b\alpha}{\beta-\alpha} & \text{при } \alpha < x < \beta; \\ 0 & \text{при } 0 < x < \alpha \text{ и } \beta < x < T \end{cases};$$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2T}(a+b)(\alpha-\beta);$$

$$a_k = \frac{2}{T} \left\{ \frac{b \sin k\omega\beta - a \sin k\omega\alpha}{k\omega} + \frac{b-a}{\beta-\alpha} \frac{\cos k\omega\beta - \cos k\omega\alpha}{k^2\omega^2} \right\};$$

$$b_k = \frac{2}{T} \left\{ \frac{-b \cos k\omega\beta + a \cos k\omega\alpha}{k\omega} + \frac{b-a}{\beta-\alpha} \frac{\sin k\omega\beta - \sin k\omega\alpha}{k^2\omega^2} \right\} \quad (k=1, 2, 3\ldots).$$

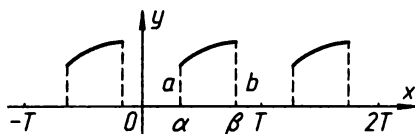


Рис. 11.1

Для разложения произвольной ломаной линии в интервале  $(0, T)$  ее следует представить в виде суммы функций указанного вида.

Коэффициенты Эйлера-Фурье участка синусоиды (рис. 11.2)

$$y = \begin{cases} \sin(\omega x - \varphi) & \text{при } \alpha < x < \beta \\ 0 & \text{при } 0 < x < \alpha \text{ и } \beta < x < T \end{cases};$$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{\pi} \sin \left( \omega \frac{\beta+\alpha}{2} - \varphi \right) \sin \left( \omega \frac{\beta-\alpha}{2} \right);$$

$$a_1 = \frac{1}{2\pi} \{ \sin[\omega(\beta+\alpha) - \varphi] \sin \omega(\beta-\alpha) - \omega(\beta-\alpha) \sin \varphi \};$$

$$b_1 = -\frac{1}{2\pi} \{ \cos[\omega(\beta+\alpha) - \varphi] \sin \omega(\beta-\alpha) - \omega(\beta-\alpha) \cos \varphi \};$$

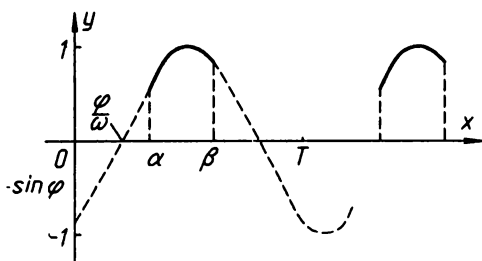


Рис. 11.2

$$a_k = \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{\sin \left[ (k+1) \omega \frac{\beta+\alpha}{2} - \varphi \right] \sin (k+1) \omega \frac{\beta-\alpha}{2}}{k+1} - \right.$$

$$\left. - \frac{\sin \left[ (k-1) \omega \frac{\beta+\alpha}{2} + \varphi \right] \sin (k-1) \omega \frac{\beta-\alpha}{2}}{k-1} \right\};$$

$$b_k = -\frac{1}{\pi} \left\{ \frac{\cos \left[ (k+1) \omega \frac{\beta+\alpha}{2} - \varphi \right] \sin (k+1) \omega \frac{\beta-\alpha}{2}}{k+1} - \right.$$

$$\left. - \frac{\cos \left[ (k-1) \omega \frac{\beta+\alpha}{2} + \varphi \right] \sin (k-1) \omega \frac{\beta-\alpha}{2}}{k-1} \right\} \quad (k=2, 3, 4, \dots)$$

**2. Численный гармонический анализ.** Приближенное значение первых 12 или 24 коэффициентов  $a_k$ ,  $b_k$  можно вычислить при помощи шаблонов для гармонического анализа.

**3. Примеры разложений в тригонометрические ряды** приведены в табл. 11.2.

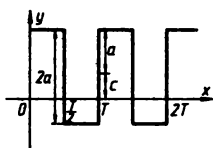


Рис. 11.3

$$y = c + \frac{4a}{\pi} \left( \sin \omega x + \frac{1}{3} \sin 3\omega x + \frac{1}{5} \sin 5\omega x + \frac{1}{7} \sin 7\omega x + \dots \right)$$

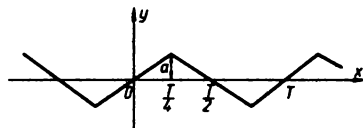


Рис. 11.4

$$y = \frac{8a}{\pi^2} \left( \sin \omega x - \frac{1}{3^2} \sin 3\omega x + \frac{1}{5^2} \sin 5\omega x - \frac{1}{7^2} \sin 7\omega x + \dots \right)$$

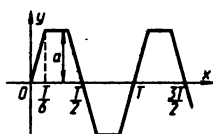


Рис. 11.5

$$y = \frac{6\sqrt{3}a}{\pi^2} \left( \sin \omega x - \frac{1}{5^2} \sin 5\omega x + \frac{1}{7^2} \sin 7\omega x - \frac{1}{11^2} \sin 11\omega x + \dots \right)$$

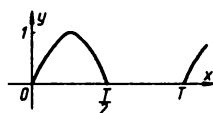


Рис. 11.6

$$y = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin \omega x - \frac{2}{\pi} \left( \frac{\cos 2\omega x}{1 \cdot 3} + \frac{\cos 4\omega x}{3 \cdot 5} + \frac{\cos 6\omega x}{5 \cdot 7} + \dots \right)$$

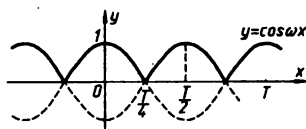


Рис. 11.7

$$y = \frac{4}{\pi} \left( \frac{1}{2} + \frac{\cos 2\omega x}{1 \cdot 3} - \frac{\cos 4\omega x}{3 \cdot 5} + \frac{\cos 6\omega x}{5 \cdot 7} - \dots \right)$$

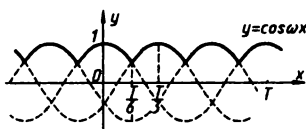


Рис. 11.8

$$y = \frac{3\sqrt{3}}{\pi} \left( \frac{1}{2} + \frac{\cos 3\omega x}{2 \cdot 4} - \frac{\cos 6\omega x}{5 \cdot 7} + \frac{\cos 9\omega x}{8 \cdot 10} - \dots \right)$$

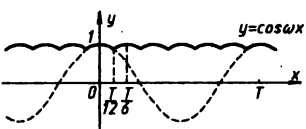


Рис. 11.9

$$y = \frac{6}{\pi} \left( \frac{1}{2} + \frac{\cos 6\omega x}{5 \cdot 7} - \frac{\cos 12\omega x}{11 \cdot 13} + \frac{\cos 18\omega x}{17 \cdot 19} - \dots \right)$$

## 12. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

### 12.1. Дифференциальные уравнения первого порядка

**1. Уравнения, разрешенные относительно производной  $y' = f(x, y)$ .** Начальная задача — отыскание решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданному начальному условию

$$y|_{x=x_0} = y_0.$$

Общее решение дифференциального уравнения — решение, содержащее произвольную постоянную  $C$ , при надлежащем выборе которой можно получить решение любой начальной задачи, допускающей единственное решение.

В помещенных ниже таблицах даны некоторые уравнения, общее решение которых можно записать в квадратурах.

Таблица 12.1

Тип	Уравнение	Решение (интеграл)
1. С разделяющимися переменными	$y' = f(x)g(y)$	$\int_{y_0}^y \frac{dy}{g(y)} = \int_{x_0}^x f(x) dx$
2. Линейные	$y' + p(x)y = q(x)$	$y = y_1(x) \left[ y_0 + \int_{x_0}^x q(x) y_1^{-1}(x) dx \right],$ <p>где <math>y_1(x) = e^{-\int_{x_0}^x p(x) dx}</math> (решение усеченного уравнения)</p>
3. Уравнения Бернулли	$y' + p(x)y = q(x)y^n$ ( $n \neq 1$ )	$y = y_1(x) \left[ y_0^{1-n} + (1-n) \int_{x_0}^x q(x) y_1^{n-1}(x) dx \right]^{\frac{1}{1-n}},$ <p>где <math>y_1(x) = e^{-\int_{x_0}^x p(x) dx}</math></p>
4. В полных дифференциалах	$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ при условии $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$	$\int_{x_0}^x P(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y) dy = 0$
5. Однородные	$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$	$\ln Cx = \int \frac{du}{f(u)-u}, \quad \text{где } u = \frac{y}{x}$

В табл. 12.2 показаны уравнения, которые приводятся к предыдущим (табл. 12.1).

Таблица 12.2

Уравнение	Подстановка	Преобразованное уравнение
$y' = f(ax + by + c)$ при $b \neq 0$	$ax + by + c = u$	$u' = a + bf(u)$ (тип 1)
$y' = f\left(\frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right)$ при $ab_1 - a_1b \neq 0$	$\begin{cases} x = X - \frac{cb_1 - c_1b}{ab_1 - a_1b} \\ y = Y - \frac{ac_1 - a_1c}{ab_1 - a_1b} \end{cases}$	$\frac{dY}{dX} = f\left(\frac{aX + bY}{a_1X + b_1Y}\right)$ (тип 5)
$y' = \frac{y}{x} + g(x)h\left(\frac{y}{x}\right)$	$y = ux$	$u' = \frac{g(x)}{x}h(u)$ (тип 1)
$y' = ay^2 + \frac{b}{x^2}$	$y = \frac{u}{x}$	$u' = \frac{1}{x}(au^2 + u + b)$ (тип 1)

**2. Графическое интегрирование.** Дифференциальное уравнение  $y' = f(x, y)$  определяет поле направлений — часть плоскости, в каждой точке которой направление определяется угловым коэффициентом  $\operatorname{tg} \alpha = f(x, y)$  (рис. 12.1).

Элементом поля направлений называется совокупность точки и соответствующего ей направления.

Графическое интегрирование заключается в построении достаточного количества элементов поля и соединении их в плавные кривые.

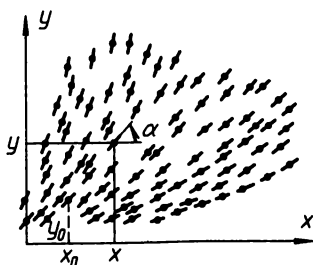


Рис. 12.1

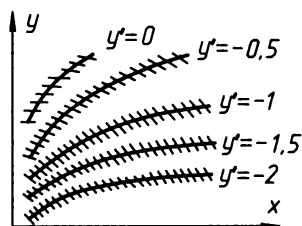


Рис. 12.2

*Изоклиной* называется геометрическое место точек поля с одинаковым направлением поля. При графическом интегрировании удобно чертить элементы поля на изоклинах (рис. 12.2).

### 3. Численное интегрирование

*Метод Эйлера.* Расчет ведется последовательно по формулам:

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0);$$

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \quad (n=1, 2, 3, \dots),$$

где  $h = x_1 - x_0 = x_{n+1} - x_n \quad (n=1, 2, 3, \dots)$ .

Получающаяся таблица значений  $y_n$  тем ближе к таблице решения начальной задачи  $y' = f(x, y)$ ,  $y|_{x=x_0} = y_0$ , чем меньше шаг  $h$ .

**4. Интегрирование методом последовательных приближений.** Выбирают произвольную функцию  $\varphi_0(x)$ , удовлетворяющую начальному условию  $\varphi_0(x) = y_0$ , и вычисляют последовательные приближения по формулам:

$$\varphi_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f[x, \varphi_n(x)] dx \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

Последовательность приближений  $\varphi_n(x)$  сходится к решению начальной задачи, если это решение единственно.

**5. Уравнения, не разрешенные относительно производной  $y'$**

*Уравнения второй степени относительно  $y'$*

$$(y')^2 + P(x, y)y' + Q(x, y) = 0$$

следует предварительно разрешить относительно  $y'$ . Через начальную точку  $(x_0, y_0)$  здесь могут проходить две интегральные кривые с разными касательными.

*Уравнения Лагранжа* (линейные относительно  $x$  и  $y$ )

$$a(y')x + b(y')y + c(y') = 0$$

интегрируются путем введения дифференциального параметра  $p = y'$  и дифференцирования полученного уравнения с заменой  $\frac{dy}{dx}$  через  $p$ . Общий интеграл получается в параметрической форме (табл. 12.3).

Таблица 12.3

Уравнение	Общий интеграл ( $p$ — параметр)
$x = g(y')$	$x = g(p); \quad y = \int p g'(p) dp + C$
$x = h(y')$	$x = \int \frac{h'(p)}{p} dp + C; \quad y = h(p)$
$y = x\varphi(y') + \psi(y')$ при $\varphi(y') \neq y'$	$x = x(p, C); \quad y = x(p, C)\varphi(p) + \psi(p),$ где $x(p, C)$ является решением линейного уравнения $\frac{dx}{dp} - x \frac{\varphi'(p)}{p - \varphi(p)} = \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)}$

Уравнение Клеро:  $y = xy' + \psi(y')$ .

Общее решение  $y = Cx + \psi(C)$  определяет семейство прямых, совпадающее с семейством изоклин; особый интеграл

$$x = -\psi'(p), \quad y = -p\psi'(p) + \psi(p)$$

в параметрической форме определяет кривую, огибающую все прямые семейства.

## 12.2. Дифференциальные уравнения второго порядка

Дифференциальное уравнение гармонического движения:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0.$$

Общий интеграл можно написать в следующих двух формах (где  $i = \sqrt{-1}$ ):

$$x = C_1 e^{kti} + C_2 e^{-kti}, \quad x = A \cos kt + B \sin kt.$$

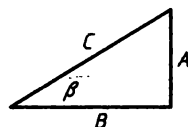


Рис. 12.3

Последнюю формулу можно преобразовать следующим образом: если постоянные  $A$  и  $B$  принять за катеты прямоугольного треугольника (рис. 12.3), то

$$A = C \sin \beta, \quad B = C \cos \beta,$$

следовательно,

$$x = C (\sin \beta \cos kt + \cos \beta \sin kt) \quad \text{или} \quad x = C \sin(kt + \beta).$$

Если  $\beta$  принять равным  $\beta' + \frac{\pi}{2}$ , то

$$x = C \sin\left(kt + \beta' + \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{или} \quad x = C \cos(kt + \beta').$$

В вышеприведенных формулах величины  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $\beta$  и  $\beta'$  — произвольные постоянные.

Примечание. В некоторых случаях дифференциальное уравнение движения принимает вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k \sin x = 0.$$

Это уравнение — не линейное. Его можно сделать линейным, заменяя  $\sin x$  через  $x$ . При малых значениях  $x$  такая замена не вызывает ощутительной ошибки. Так, при  $x = 5^\circ$ ,

$$\sin x = 0,08716 \quad x = 0,0873$$

Даже при  $x = 10^\circ$  ошибка составляет всего около 0,5%.

Уравнение  $\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0$  имеет общий интеграл:

$$x = C_1 e^{kt} + C_2 e^{-kt}.$$

Дифференциальное уравнение затухающих колебаний:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\mu \frac{dx}{dt} + k^2x = 0, \quad \mu < k.$$

Общий интеграл:

$$x = e^{-\mu t} \left( A \cos \sqrt{k^2 - \mu^2} t + B \sin \sqrt{k^2 - \mu^2} t \right)$$

или

$$x = C e^{-\mu t} \cos(\sqrt{k^2 - \mu^2} t + \beta).$$

Дифференциальное уравнение гармонического движения с постоянной возмущающей силой:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = c.$$

Общий интеграл:

$$x = A \cos kt + B \sin kt + \frac{c}{k^2} \quad \text{или} \quad x = C \sin(kt + \beta) + \frac{c}{k^2}.$$

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = L \cos nt + M \sin nt, \quad \text{где } n \neq k.$$

Общий интеграл:

$$x = A \cos kt + B \sin kt + \frac{L}{k^2 - n^2} \cos nt + \frac{M}{k^2 - n^2} \sin nt,$$

где  $A$  и  $B$  — произвольные постоянные.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = L \cos kt + M \sin kt.$$

Общий интеграл:

$$x = A \cos kt + B \sin kt + \frac{L}{2k} t \sin kt - \frac{M}{2k} t \cos kt.$$

### 12.3. Некоторые дифференциальные уравнения высших порядков

Уравнение

$$y^{(n)} = f(x).$$

Общее решение

$$y = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x f(t) (x-t)^{n-1} dt + C_1 + C_2 x + \dots + C_n x^{n-1}.$$

Постоянные  $C_k$  выражаются через начальные условия при помощи формул

$$C_k = \frac{1}{(k-1)!} y^{(k-1)} \Big|_{x=x_0}.$$

Следующие уравнения приводятся к уравнениям первого порядка и уравнению указанного типа:

1) Уравнение  $F(x, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$  заменой

$$y^{(n-1)} = z; \quad y^{(n)} = z'.$$

2) Уравнение  $F(y^{(n-2)}, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$  заменой

$$y^{(n-2)} = u; \quad y^{(n-1)} = z; \quad y^{(n)} = z \frac{dz}{du}.$$

**Пример.**

$$y'' = f(y).$$

Заменяем

$$y' = z; \quad y'' = z \frac{dz}{dy}.$$

Получаем

$$z \, dz = f(y) \, dy.$$

Интегрируем

$$\frac{z^2}{2} = \int f(y) \, dy + C_1.$$

Первый интеграл

$$y' = z(y, C_1) = \pm \sqrt{2 \int f(y) \, dy + 2C_1}.$$

Общий интеграл

$$\int \frac{dy}{z(y, C_1)} = x + C_2.$$

## 12.4. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x).$$

*Уравнение без правой части (однородное)*

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

интегрируется при помощи характеристического уравнения

$$\varphi(r) = r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_{n-1} r + a_n = 0.$$

Если  $\varphi(r) = (r - r_1)^{k_1} (r - r_2)^{k_2} \dots$ , то общее решение уравнения имеет вид:

$$y = (A_1 + A_2 x + \dots + A_{k_1} x^{k_1-1}) e^{r_1 x} + (B_1 + B_2 x + \dots + B_{k_2} x^{k_2-1}) e^{r_2 x} + \dots,$$

где  $A, B, \dots$  — постоянные интегрирования.

В частности, если все корни характеристического уравнения различны, то общее решение имеет вид:

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + \dots + C_n e^{r_n x}.$$

Если все коэффициенты уравнения — действительные числа, то комплексные корни характеристического уравнения попарно сопряжены, т. е.  $r_1 = \alpha + j\beta$ ,  $r_2 = \alpha - j\beta$ , причем  $k_1 = k_2$ . В этом случае соответствующую часть общего решения

$$(A_1 + A_2 x + \dots + A_{k_1} x^{k_1-1}) e^{(\alpha + j\beta)x} + (B_1 + B_2 x + \dots + B_{k_1} x^{k_1-1}) e^{(\alpha - j\beta)x}$$

можно записать в действительной форме:

$$(A'_1 + A'_2 x + \dots + A'_{k_1} x^{k_1-1}) e^{\alpha x} \cos \beta x + (B'_1 + B'_2 x + \dots + B'_{k_1} x^{k_1-1}) e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

*Неоднородное уравнение* (с правой частью  $f(x) \neq 0$ ).

Общее решение имеет вид:

$$y = y_* + Y,$$

где  $y_*$  — общее решение соответствующего однородного уравнения, а  $Y$  — какое-нибудь частное решение данного уравнения.

Если все корни характеристического уравнения различны, то частное решение находят по формуле

$$Y = \sum_{v=1}^n \frac{e^{r_v x}}{\varphi'(r_v)} \int_{x_0}^x f(t) e^{-r_v t} dt.$$

**Пример.**

$$y'' + \omega^2 y = f(x).$$

Характеристическое уравнение  $\varphi(r) = r^2 + \omega^2 = 0$ ; его корни:  $r_1 = j\omega$ ;  $r_2 = -j\omega$ ; производная  $\varphi'(r) = 2r$ .

Частное решение

$$Y = \frac{e^{j\omega x}}{2j\omega} \int_{x_0}^x f(t) e^{-j\omega t} dt + \frac{e^{-j\omega x}}{-2j\omega} \int_{x_0}^x f(t) e^{j\omega t} dt = \frac{1}{\omega} \int_{x_0}^x f(t) \sin \omega(x-t) dt.$$

Общее решение

$$y = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x + Y.$$

*Уравнение с правой частью специального вида:*

$$f(x) = P_m(x) e^{sx},$$

где  $P_m(x)$  — многочлен степени  $m$ .

Если число  $s$  не является корнем характеристического уравнения, то подбирают частное решение в виде:

$$Y = Q_m(x) e^{sx},$$

где  $Q_m(x)$  — многочлен степени  $m$ , коэффициенты которого подлежат определению.

Если  $s$  является корнем характеристического уравнения, причем кратность этого корня равна  $k$ , то частное решение подбирают в виде:

$$Y = x^k Q_m(x) e^{sx}.$$

Подбор частного решения производится так. Выражение для  $Y$  с буквенными коэффициентами подставляют в данное уравнение; из условия равенства получаемых при этом многочленов находят значения искомых коэффициентов путем сравнения коэффициентов при одинаковых степенях  $x$ .

Если коэффициенты уравнения — действительные числа и правая часть имеет вид:

$$f_1(x) = P_m(x) e^{\lambda x} \cos \omega x \quad \text{или} \quad f_2(x) = P_m(x) e^{\lambda x} \sin \omega x,$$

то сначала находят частное решение вспомогательного уравнения с правой частью вида:

$$f(x) = P_m(x) e^{(\lambda + j\omega)x}$$

(здесь  $s = \lambda + j\omega$ ).

В частном решении  $\tilde{Y}(x)$  вспомогательного уравнения отделяют действительную и мнимую части  $\tilde{Y}(x) = Y_1(x) + jY_2(x)$ . Функция  $Y_1(x)$  является частным решением уравнения с правой частью  $f_1(x)$ , а функция  $Y_2(x)$  — частным решением уравнения с правой частью  $f_2(x)$ .

Примечание. Если правая часть  $f(x)$  есть сумма выражений описанного вида, то следует найти частное решение отдельно для каждого слагаемого и сложить полученные результаты.

**Пример.**

$$y^{IV} + 2y''' + 2y'' = \cos x + x^2 - 3.$$

Характеристическое уравнение

$$\varphi(r) = r^4 + 2r^3 + 2r^2 = 0.$$

Его корни:  $r_1 = 0$ ;  $r_2 = 0$ ;  $r_3 = -1 + j$ ;  $r_4 = -1 - j$ .

Общее решение

$$y = y_0 + Y = (C_1 + C_2 x) + C_3 e^{-x} \cos x + C_4 e^{-x} \sin x + (Y_1 + Y_2).$$

Для нахождения  $Y_1$  в уравнение (вспомогательное)

$$y^{IV} + 2y''' + 2y'' = e^{jx} \quad (m = 0; \lambda = 0; \omega = 1)$$

подставляем  $\tilde{Y}_1 = a e^{jx}$  ( $k = 0$ ). Получаем

$$a j^4 e^{jx} + 2a j^3 e^{jx} + 2a j^2 e^{jx} = e^{jx}.$$

Сравнивая коэффициенты, находим:

$$a = \frac{1}{1 - 2j - 2} = \frac{-1 + 2j}{5}.$$

Отсюда

$$Y = \operatorname{Re} \tilde{Y}_1 = \operatorname{Re} \left\{ \frac{-1 + 2j}{5} (\cos x + j \sin x) \right\} = -\frac{1}{5} \cos x - \frac{2}{5} \sin x.$$

Для нахождения  $Y_2$  в уравнение

$$y^{IV} + 2y''' + 2y'' = x^2 - 3 \quad (m = 2; s = 0)$$

подставляем  $Y_2 = x^2 (ax^2 + bx + c)$  ( $k=2$ ). Получаем

$$24a + 2(24ax + 6b) + 2(12ax^2 + 6bx + 2c) = x^2 - 3.$$

Сравнивая коэффициенты, находим:

$$a = \frac{1}{24}; \quad b = -\frac{1}{6}; \quad c = -\frac{1}{2}.$$

$$Y_2 = x^2 \left( \frac{1}{24}x^2 - \frac{1}{6}x - \frac{1}{2} \right).$$

**Критерий устойчивости.** Решения однородного уравнения называются *устойчивыми*, если все они стремятся к нулю при  $x \rightarrow +\infty$  (здесь  $x$  — время).

## 12.5. Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

*Однородная система*

$$y'_v = a_{v1}y_1 + a_{v2}y_2 + \dots + a_{vn}y_n \quad (v=1, 2, \dots, n)$$

интегрируется при помощи *характеристического уравнения*

$$\varphi(r) \equiv \begin{vmatrix} a_{11} - r & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - r & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - r \end{vmatrix} = 0.$$

Если  $\varphi(r) = (r - r_1)^{k_1} (r - r_2)^{k_2} \dots$ , то общее решение системы дается формулами

$$y_i = P_{1i}(x) e^{r_1 x} + P_{2i}(x) e^{r_2 x} + \dots, \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

где  $P_{1i}(x)$  — многочлены степени не выше  $(k_1 - 1)$ ;  $P_{2i}(x)$  — многочлены степени не выше  $(k_2 - 1)$  и т. д.

Коэффициенты этих многочленов находят путем подстановки формул общего решения в заданные уравнения и сравнения многочленов при  $e^{r_1 x}, e^{r_2 x}, \dots$ . Это приводит к системам линейных однородных уравнений, которые позволяют выразить все коэффициенты через  $n$  произвольных постоянных:  $C_1, C_2, \dots, C_n$ .

В частности, если все корни характеристического уравнения различны, то общее решение дается формулами

$$y_i = A_{1i} e^{r_1 x} + A_{2i} e^{r_2 x} + \dots + A_{ni} e^{r_n x} \quad (i=1, 2, \dots, n).$$



то ее следует предварительно привести к системе уравнений первого порядка путем введения новых искомых функций.

Введение новых искомых функций производится так. Пусть в уравнения входят производные  $y_1'', y_1''', \dots, y_1^{(k)}$ .

Полагаем:

$$z_1 = y_1'; \quad z_2 = y_1''; \quad \dots; \quad z_{k-1} = y_1^{(k-1)}.$$

Для новых  $(k-1)$  искомых функций получаем  $(k-1)$  новых дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} y_1' &= z_1; \\ z_1' &= z_2; \\ &\dots \dots \dots \\ z_{k-2}' &= z_{k-1}, \end{aligned}$$

а в старые уравнения вместо производных высших порядков  $y_1'', y_1''', \dots, y_1^{(k)}$  войдут функции  $z_1, z_2, \dots, z_{k-1}$  и производная первого порядка  $z_{k-1}' = y_1^{(k)}$ .

**Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с переменными коэффициентами**

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x).$$

Если значение  $x_0$  принадлежит области непрерывности функций  $p_1(x)$ ,  $p_2(x)$  и  $f(x)$ , то при любых начальных условиях  $y|_{x=x_0} = y_0$ ;  $y'|_{x=x_0} = y_0'$  уравнение имеет единственное решение.

*Общее решение*

$$y = Y(x) + C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

где  $Y(x)$  — какое-либо частное решение данного уравнения;  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  — линейно независимые решения соответствующего однородного уравнения (при  $f(x) \equiv 0$ );  $C_1$ ,  $C_2$  — постоянные интегрирования.

Решения  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  являются линейно независимыми, если их отношение не сводится к постоянной.

Если известно одно частное решение  $y_1(x)$  однородного уравнения, то

$$y_2(x) = y_1(x) \int_{x_0}^x \frac{1}{y_1^2(t)} W(t) dt$$

и

$$Y(x) = y_1(x) \int_{x_0}^x \frac{1}{y_1^2(t)} W(t) dt \int_{x_0}^t \frac{f(u) y_1(u)}{W(u)} du,$$

или

$$Y(x) = \int_{x_0}^x f(t) \frac{y_2(x) y_1(t) - y_1(x) y_2(t)}{W(t)} dt,$$

где

$$W(x) = e^{-\int_{x_0}^x p_1(t) dt} = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}.$$

## Интегрирование при помощи рядов

### Уравнение

$$p_0(x) y'' + p_1(x) y' + p_2(x) y = f(x),$$

где  $p_0(x)$ ,  $p_1(x)$ ,  $p_2(x)$ ,  $f(x)$  являются многочленами или разлагаются в степенные ряды по степеням  $x$ , причем  $p_0(0) \neq 0$ .

Решение находят в виде ряда

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n + \dots,$$

где  $c_0 = y|_{x=0}$ ;  $c_1 = y'|_{x=0}$ , а остальные коэффициенты находят методом неопределенных коэффициентов, т. е. путем подстановки ряда для  $y$  в уравнение и сравнения коэффициентов при одинаковых степенях  $x$ .

### Уравнение

$$x^2 y'' + x p_1(x) y' + p_2(x) y = 0.$$

Решения находят в виде обогатченного степенного ряда:

$$y = x^r (c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n + \dots),$$

где  $r$  — корень определяющего уравнения:

$$r(r-1) + p_1(0)r + p_2(0) = 0,$$

а коэффициенты  $C_n$  находят методом неопределенных коэффициентов.

Примечание. Если решение надо найти не в окрестности точки  $x = 0$ , а в окрестности точки  $x = x_0$ , то следует сначала сделать подстановку  $x = x_0 + t$ .

# 13. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

## 13.1. Координаты. Точка. Прямая

**1. Координаты.** Координаты, определяющие положение точки, называются точечными и разделяются на прямолинейные и криволинейные. К первым относятся декартовы координаты — прямоугольные и косоугольные, однородные координаты и др. Важнейшими из числа криволинейных являются полярные координаты.

### Прямоугольные координаты

Параллельное перемещение осей ( $a$  и  $b$  — координаты нового начала в старой системе  $OX$  и  $OY$ , рис. 13.1):

$$x' = x - a; \quad x = x' + a;$$

$$y' = y - b; \quad y = y' + b.$$

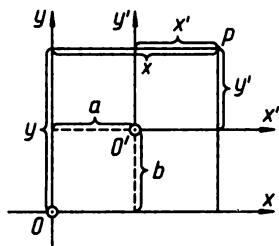


Рис. 13.1

Вращение прямоугольной системы вокруг того же начала на угол  $\varphi$  (рис. 13.2):

1) выражение новых координат через старые:

$$x_1 = x \cos \varphi + y \sin \varphi,$$

$$y_1 = y \cos \varphi - x \sin \varphi;$$

2) выражение старых координат через новые:

$$x = x_1 \cos \varphi - y_1 \sin \varphi,$$

$$y = x_1 \sin \varphi + y_1 \cos \varphi.$$

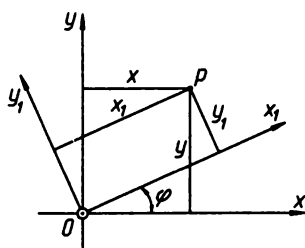


Рис. 13.2

### Косоугольные координаты

Выражение прямоугольных координат через косоугольные, если  $\alpha$  и  $\beta$  — углы, составляемые осями  $O\xi$  и  $O\eta$  с осью  $OX$  (рис. 13.3), причем  $\gamma = \beta - \alpha$  = координатный угол:

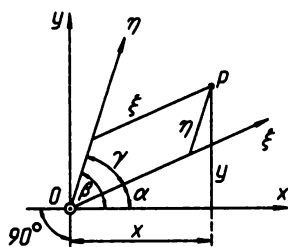


Рис. 13.3

$$x = \xi \cos \alpha + \eta \cos \beta,$$

$$y = \xi \sin \alpha + \eta \sin \beta.$$

Если  $\alpha = 0$ , т. е. оси  $O\xi$  и  $Ox$  совпадают, то

$$x = \xi + \eta \cos \beta, \quad y = \eta \sin \beta.$$

### Полярные координаты

Положение точки определяется радиусом-вектором  $\rho$  и полярным углом  $\theta$  (точка  $O$  — полюс,  $Ox$  — полярная ось, рис. 13.4).

Координатными линиями в полярной системе координат являются концентрические круги (с центром в полюсе) и лучи, проходящие через полюс.

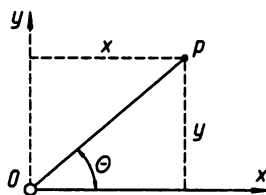


Рис. 13.4

Переход от полярных координат к прямоугольным и обратно:

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta;$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x}.$$

**2. Точка.** Расстояние между точками  $P_1(x_1, y_1)$  и  $P_2(x_2, y_2)$ :

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Координаты точки  $P_3$ , делящей пополам отрезок  $P_1P_2$ :

$$x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2},$$

$$y_3 = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Координаты точки  $P_3$ , делящей отрезок  $P_1P_2$  в отношении  $n_1 : n_2 = \lambda$

$$x_3 = \frac{n_1 x_2 + n_2 x_1}{n_1 + n_2} = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda},$$

$$y_3 = \frac{n_1 y_2 + n_2 y_1}{n_1 + n_2} = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

### 3. Прямая линия в прямоугольных координатах

Уравнение прямой в общем виде:

$$Ax + By + C = 0$$

или

$$y = mx + b,$$

где  $m$  — угловой коэффициент  
 $= \operatorname{tg} \alpha$ ,  $b$  — отрезок, отсекаемый  
прямой на оси  $OY$  (рис. 13.5).

Частные случаи:

$Ax + By = 0$  или  $y = mx$  — уравнение прямой, проходящей через  
начало координат;

$x = a$  — уравнение прямой, параллельной оси  $OY$ ;

$y = b$  — уравнение прямой, параллельной оси  $OX$ ;

$y = 0$  — уравнение оси  $OX$ ;

$x = 0$  — уравнение оси  $OY$ .

Уравнение прямой в отрезках, отсекаемых на осях координат (рис. 13.5)

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Уравнение в нормальном виде (уравнение Гессе):

$$x \cos \omega + y \sin \omega = p,$$

где  $p$  — длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на данную прямую (рис. 13.5).

Зависимости между постоянными предыдущих уравнений:

$$a = -\frac{C}{A} = -\frac{b}{m} = \frac{p}{\cos \omega}; \quad b = -\frac{C}{B} = -am = \frac{p}{\sin \omega};$$

$$\operatorname{tg} \alpha = m = -\frac{A}{B} = -\frac{b}{a} = -\operatorname{ctg} \omega;$$

$$\cos \omega = \frac{A}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}; \quad \sin \omega = \frac{B}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}; \quad p = \frac{-C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} > 0.$$

Прямая через точку, заданную координатами  $(x_1, y_1)$ :

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

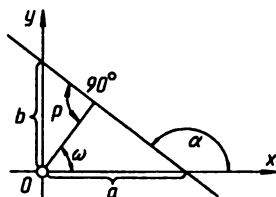


Рис. 13.5

Прямая через две точки  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$ :

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \quad \text{или} \quad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Две прямые  $y = m_1x + b_1$  и  $y = m_2x + b_2$ :

- а) взаимно параллельны, если  $m_1 = m_2$ ,
- б) взаимно перпендикулярны, если  $1 + m_1m_2 = 0$  или  $m_1m_2 = -1$ ,
- в) образуют между собою в общем случае угол  $\gamma$ , определяемый формулой:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2}.$$

Три точки с координатами  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  и  $(x_3, y_3)$  лежат на одной прямой, если

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Три прямые  $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ ,  $A_2x + B_2y + C_2 = 0$  и  $A_3x + B_3y + C_3 = 0$  пересекаются в одной точке, если

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & 1 \\ A_2 & B_2 & 1 \\ A_3 & B_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Примечание. Последние два уравнения выражают геометрический принцип двойственности (применение в номографии).

Кратчайшее расстояние от точки  $(x_1, y_1)$

а) до прямой  $y = mx + b$ :  $d = \frac{y_1 - mx_1 - b}{\sqrt{m^2 + 1}};$

б) до прямой  $Ax + By + C = 0$ :  $d = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$

#### 4. Прямая линия в полярных координатах

Уравнение прямой PQ (рис. 13.6):

$$\rho \cos(\theta - \omega) = p \quad \text{или} \quad \rho \cos(\omega - \theta) = p.$$

Отрезок, отсекаемый прямой на полярной оси ( $\theta = 0$ ):

$$OA = \rho_0 = \frac{p}{\cos \omega}.$$

Уравнения двух параллельных прямых

$$\rho \cos(\theta - \omega) = p_1 \quad \text{и} \quad \rho \cos(\theta - \omega) = p_2.$$

Две прямые, определяемые углами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , взаимно перпендикулярны, если  $\omega_2 - \omega_1 = 90^\circ$ .

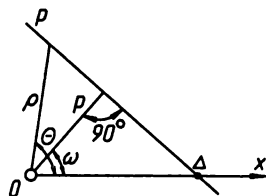


Рис. 13.6

## 13.2. Общие уравнения и свойства кривых

### 1. Уравнение кривой

Уравнение кривой в декартовых координатах:

а) в неявной форме:

$$F(x, y) = 0;$$

б) в явной форме:

$$y = f(x);$$

в) в параметрической форме ( $t$  — параметр):

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t).$$

Уравнение кривой в полярных координатах:

$$F(\rho, \theta) = 0 \quad \text{или} \quad \rho = f(\theta).$$

**2. Касательная и нормаль.** Угловым коэффициентом касательной к кривой в точке  $(x, y)$ , или тангенс угла, составляемого касательной с положительной осью  $x$ -ов:

$$\operatorname{tg} \alpha = y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial y} = f'_2(t) : f'_1(t);$$

$$\cos \alpha = \frac{dx}{ds}; \quad \sin \alpha = \frac{dy}{ds} = \cos \beta, \dots (\alpha + \beta = 90^\circ),$$

где  $ds$  — дифференциал дуги.

Касательная считается направленной в ту сторону, куда дуга возрастает.

$$ds = \pm \sqrt{dx^2 + dy^2} = \pm \sqrt{1 + y'^2} dx = \pm \sqrt{1 + x'^2} dy = \\ = \pm \sqrt{(d\rho)^2 + (\rho d\theta)^2} = \pm \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2} d\theta = \pm \sqrt{1 + \rho^2 \left(\frac{d\theta}{d\rho}\right)^2} d\rho.$$

Ординаты кривой возрастают при возрастающем  $x$ , если  $y' > 0$ , и убывают, если  $y' < 0$ . При  $y' = 0$  ордината получает значение  $\max$  (если  $y'' < 0$ ) или  $\min$  (если  $y'' > 0$ ).

Угловой коэффициент нормали находится из условия перпендикулярности касательной и нормали, т. е.

$$m_K \cdot m_H + 1 = 0,$$

следовательно,

$$m_H = -\frac{1}{m_K} = -\frac{dx}{dy} = -\frac{\partial F}{\partial y} : \frac{\partial F}{\partial x} = -f'_1(t) : f'_2(t).$$

Уравнение касательной  $\eta - y = m_K (\xi - x)$ ,

уравнение нормали  $\eta - y = m_H (\xi - x)$ ,

где  $x, y$  — координаты точки касания или точки пересечения нормали с кривой;  $\xi, \eta$  — текущие координаты касательной и, соответственно, нормали.

В прямоугольной системе координат (рис. 13.7):  
длина касательной

$$AT = y \frac{ds}{dy} = y \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2},$$

длина нормали

$$AN = y \frac{ds}{dx} = y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

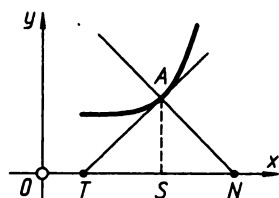


Рис. 13.7

подкасательная

$$ST = y \frac{dx}{dy},$$

поднормаль

$$SN = y \frac{dy}{dx}.$$

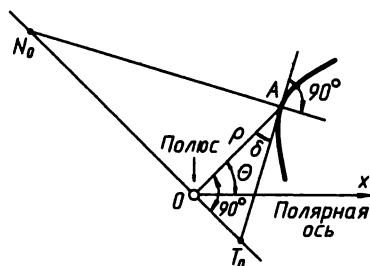


Рис. 13.8

В полярной системе координат (рис. 13.8):  
полярная касательная

$$AT_0 = \rho \frac{ds}{d\rho} = \rho \sqrt{1 + \rho^2 \left( \frac{d\theta}{d\rho} \right)^2},$$

полярная нормаль

$$AN_0 = \rho \frac{ds}{d\theta} = \sqrt{\rho^2 + \left( \frac{d\rho}{d\theta} \right)^2},$$

полярная подкасательная и полярная поднормаль

$$\left. \begin{aligned} OT_0 &= \rho^2 \frac{d\theta}{d\rho}, \\ ON_0 &= \frac{d\rho}{d\theta}. \end{aligned} \right\} \quad \operatorname{tg} \delta = \rho \frac{d\theta}{d\rho}.$$

**3. Вогнутость и выпуклость кривых.** В сторону положительных  $y$ -ов кривая (рис. 13.9)

вогнута, если  $\frac{d^2 y}{dx^2} > 0$ ,

выпукла, если  $\frac{d^2 y}{dx^2} < 0$ .

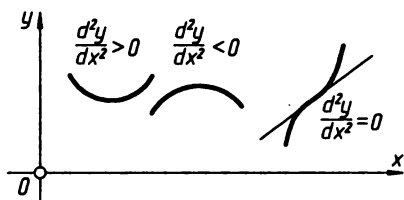


Рис. 13.9

**4. Точка перегиба.** Касательная в точке перегиба пересекает кривую (рис. 13.9). Координаты этой точки определяются из уравнений  $y=f(x)$  и  $y''=0$ , причем  $y'''$  непрерывна и не нуль. Если для некоторой точки  $y''=0$ ,  $y'''=0$ ,  $y^{IV}=0 \dots$ , но  $y^{(2k+1)}$

не нуль, т. е. первая необратившаяся в нуль производная нечетного порядка, то имеем точку перегиба. Если же первая необратившаяся в нуль производная четного порядка, то перегиба нет.

**5. Кривизна.** Кривизна линии тем больше, чем быстрее линия удаляется от своей касательной. Если  $R$  — радиус кривизны в данной точке  $(x, y)$  и  $d\varphi$  — угол смежности, т. е. угол между двумя смежными касательными (или нормальями), то кривизна

$$\frac{1}{R} = \frac{d\varphi}{ds} = \pm \frac{y''}{u^{3/2}},$$

где

$$y'' = \frac{d^2 y'}{dx^2} \quad \text{и} \quad u = 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2.$$

Координаты центра кривизны:

$$a_0 = x - \frac{y'}{y''} u \quad b_0 = y + \frac{u}{y''}.$$

**6. Огибающие кривые.** Если дано семейство кривых  $F(x, y, \alpha) = 0$ , характеризующееся переменным параметром  $\alpha$ , то огибающей называется кривая, имеющая в каждой своей точке общую касательную с той из огибаемых данного семейства, которая через эту точку проходит. Если огибающая существует, то ее уравнение получается путем исключения параметра  $\alpha$  из двух уравнений:

$$F(x, y, \alpha) = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0.$$

**7. Эволюта и эвольвента («развертываемая» и «развертка»).** Эволюта данной кривой  $A$  есть геометрическое место центров кривизны этой кривой. Кривая же  $A$  относительно ее эволюты называется эвольвентой или разверткой (рис. 13.10).

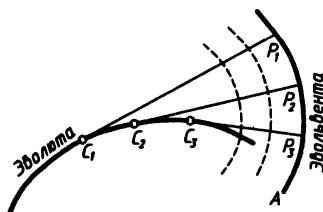


Рис. 13.10

Свойства. 1) касательная к эволюте есть нормаль к эвольвенте, следовательно, эволюта есть огибающая нормалей эвольвенты; 2) разность радиусов кривизны двух точек эвольвенты равна длине дуги эволюты между этими радиусами; 3) одной эволюте соответствует бесчисленное множество эвольвент. Механическое черчение эвольвенты — путем сматывания с эволюты натянутой нерастяжимой нити.

**8. Асимптоты.** Если кривая имеет бесконечную ветвь и при этом обладает тем свойством, что расстояние от точки  $P$  кривой до некоторой прямой беспрестанно убывает по мере удаления точки  $P$  по кривой в бесконечность, то такая прямая называется асимптотой.

### 13.3. Алгебраические кривые второго порядка

#### 13.3.1. Общие данные

**1. Общее уравнение** линии 2-го порядка (конического сечения) в декартовых координатах:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0. \quad (13.1)$$

Линии 2-го порядка различают при помощи дискриминанта:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2A & B & D \\ B & 2C & E \\ D & E & 2F \end{vmatrix} = 2(BDE - AE^2 - CD^2) - 2(B^2 - 4AC)F.$$

Если дискриминант  $\Delta = 0$ , то имеем систему двух прямых вещественных или мнимых.

Если дискриминант  $\Delta \neq 0$ , то общее уравнение представляет:

1) эллипс при  $B^2 - 4AC < 0$ , причем  $\Delta$  и  $A$  различных знаков,

2) гиперболу при  $B^2 - 4AC > 0$ ,

3) параболу при  $B^2 - 4AC = 0$ ,

4) мнимость при  $B^2 - 4AC < 0$ , и при  $\Delta$  и  $A$  одного знака.

Точка, в которой делятся пополам все хорды, через нее проведенные, называется центром. Парабола не имеет центра. Эллипс и гипербола — кривые с центром. Координаты центра:

$$a = \frac{2CD - BE}{B^2 - 4AC}; \quad b = \frac{2AE - BD}{B^2 - 4AC}.$$

Уравнение касательной в точке  $(x, y)$ , причем  $\xi$  и  $\eta$  — текущие координаты:

$$\eta - y = m(\xi - x),$$

где

$$m = -\frac{2Ax + By + D}{Bx + 2Cy + E}.$$

Диаметр кривой есть геометрическое место середин параллельных хорд. Диаметр, перпендикулярный к хордам, с ним сопряженным, называется главным диаметром, или осью кривой. Вершина кривой есть точка пересечения кривой с главным диаметром.

Если повернуть прямоугольную систему координат на угол  $\varphi$ , удовлетворяющий условию

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{B}{A - C},$$

то в уравнении (13.1) исчезнет член с произведением координат и это уравнение примет вид:

$$A_1 x_1^2 + C_1 y_1^2 + D_1 x_1 + E_1 y_1 + F = 0. \quad (13.1a)$$

Это уравнение представляет собою:

- 1) эллипс, если  $A_1$  и  $C_1$  одинаковых знаков,
- 2) гиперболу, если  $A_1$  и  $C_1$  разных знаков,
- 3) параболу, если  $A_1 = 0$  или  $C_1 = 0$ .

Примечание. При всяком преобразовании прямолинейных координат остаются неизменными 3 величины, называемые инвариантами, а именно

$$\Delta = \Delta_1, \quad A + C = A_1 + C_1, \quad B^2 - 4AC = B_1^2 - 4A_1C_1.$$

**2. Общее свойство эллипса, гиперболы и параболы:** отношение расстояний любой точки кривой от постоянной точки (фокуса) и от постоянной прямой (директрисы) есть величина постоянная. Эта величина называется численным (или астрономическим) эксцентриситетом кривой и обозначается буквой  $\varepsilon$ .

Эллипс и гипербола имеют два фокуса и две директрисы; парабола — один фокус и одну директрису.

Расстояние  $e$  фокуса от центра кривой (в случае эллипса и гиперболы) называется линейным эксцентриситетом. Численный эксцентриситет ( $\varepsilon$ ) равен отношению линейного эксцентриситета ( $e$ ) к большой полуоси ( $a$ ), т. е.  $\varepsilon = e/a$ .

**3. Общее уравнение эллипса, гиперболы и параболы, отнесенное к вершине, в прямоугольных координатах (ось  $x$ -ов — главный диаметр, ось  $y$ -ов — касательная в вершине):**

$$y^2 = 2px - (1 - \varepsilon^2)x^2 \quad (13.2)$$

или

$$y^2 = 2px - qx^2. \quad (13.3)$$

Эти уравнения представляют:

- 1) эллипс, если  $\varepsilon < 1$  или  $q > 0$ ,
- 2) круг, если  $\varepsilon = 0$  или  $q = 1$ ,
- 3) гиперболу, если  $\varepsilon > 1$  или  $q < 0$ ,
- 4) параболу, если  $\varepsilon = 1$  или  $q = 0$ .

$2p$  — параметр,  $\varepsilon$  — численный (астрономический) эксцентриситет.

Уравнение в *полярных* координатах, при условии, что полюс в фокусе, полярная ось совпадает с главным диаметром и полярный угол  $\theta$  отсчитывается от вершины, ближайшей к полюсу:

$$\rho = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \theta}, \quad (13.4)$$

где для эллипса  $\varepsilon < 1$ , для гиперболы  $\varepsilon > 1$  и для параболы  $\varepsilon = 1$ .

### 13.3.2. Круг

Общее уравнение окружности в *прямоугольной* системе координат (рис. 13.11)

$$x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0 \quad (13.5)$$

или

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2, \quad (13.6)$$

где  $a, b$  — координаты центра и  $r$  — радиус, причем

$$\begin{aligned} A &= -a, & B &= -b, \\ C &= a^2 + b^2 - r^2, & r &= \sqrt{A^2 + B^2 - C}. \end{aligned}$$

Уравнение касательной в точке  $K$  с координатами  $x_1, y_1$  (рис. 13.11)

$$(\xi - a)(x_1 - a) + (\eta - b)(y_1 - b) = r^2, \quad (13.7)$$

где  $\xi, \eta$  — текущие координаты касательной.

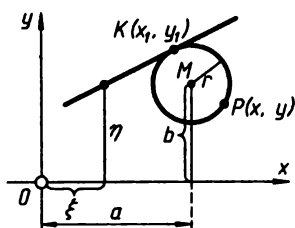


Рис. 13.11

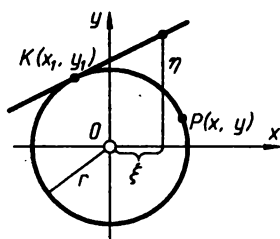


Рис. 13.12

Уравнение нормали в той же точке

$$\frac{\xi - a}{x_1 - a} = \frac{\eta - b}{y_1 - b}. \quad (13.8)$$

В частном случае, если начало координат в центре круга ( $a=0$ ,  $b=0$ ; рис. 13.12), уравнение имеет вид:

$$x^2 + y^2 = r^2. \quad (13.9)$$

Уравнение касательной в этом случае (рис. 13.12)

$$\xi x_1 + \eta y_1 = r^2 \quad (13.10)$$

и уравнение нормали

$$\frac{\xi}{x_1} = \frac{\eta}{y_1}. \quad (13.11)$$

Если  $a=r$  и  $a=0$  (рис. 13.13), то

$$x^2 + y^2 = 2rx \quad \text{или} \quad y^2 = 2rx - x^2. \quad (13.12)$$

Если  $a=0$  и  $a=r$  (рис. 13.14), то

$$x^2 + y^2 = 2ry \quad \text{или} \quad x^2 = 2ry - y^2. \quad (13.13)$$

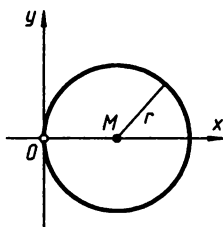


Рис. 13.13

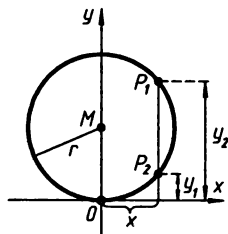


Рис. 13.14

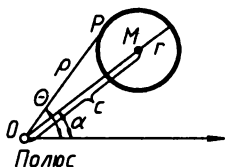


Рис. 13.15

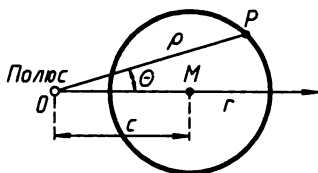


Рис. 13.16

В последнем случае (рис. 13.14) ординаты точек ( $P_1$ ,  $P_2$ ) окружности при абсциссе  $x$  определяются по формуле

$$y = r \mp \sqrt{r^2 - x^2}, \quad (13.14)$$

где знак минус для нижней точки ( $P_1$ ) и знак плюс — для верхней ( $P_2$ ).

Уравнение окружности в полярных координатах в общем случае (рис. 13.15)

$$\rho^2 - 2\rho c \cos(\theta - \alpha) + c^2 = r^2. \quad (13.15)$$

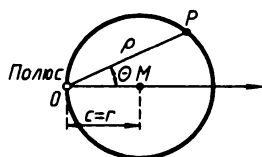


Рис. 13.17

Если полярная ось  $OX$  проходит через центр круга ( $\alpha = 0$ , рис. 13.16), то

$$\rho^2 - 2\rho c \cos \theta + c^2 = r^2. \quad (13.16)$$

Если, кроме того, полюс на окружности ( $c = r$ , рис. 13.17), то

$$\rho = 2r \cos \theta. \quad (13.17)$$

### 13.3.3. Эллипс и гипербола

#### 1. Обозначения и основные свойства (рис. 13.18 и 13.19).

Эллипс:  $2a$  — большая ось,  $2b$  — малая ось.

Гипербола:  $2a$  — вещественная ось,  $2b$  — мнимая ось.

Сумма фокусных лучей эллипса, проведенных в любую точку кривой, равна большой оси ( $2a$ ).

Разность фокусных лучей гиперболы, проведенных в любую точку кривой, равна вещественной оси ( $2a$ ).

Линейный эксцентриситет:

для эллипса:  $e = \pm \sqrt{a^2 - b^2}$ ,  $e < a$ ;

для гиперболы:  $e = \pm \sqrt{a^2 + b^2}$ ,  $e > a$ .

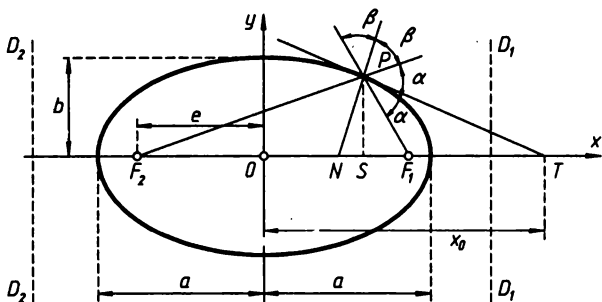


Рис. 13.18

Численный (астрономический) эксцентриситет:

$$\varepsilon = \frac{e}{a} = \frac{1}{a} \sqrt{a^2 \mp b^2} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{минус для эллипса } (\varepsilon < 1), \\ \text{плюс для гиперболы } (\varepsilon > 1). \end{array} \right.$$

**2. Директриса.** Расстояние от центра эллипса или гиперболы до директрисы  $D_1D_1$  или  $D_2D_2$ :

$$d = \pm \frac{a^2}{e} = \pm \frac{a^2}{\varepsilon} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{для эллипса } |d| > a, \\ \text{для гиперболы } |d| < a. \end{array} \right.$$

**3. Параметр.**  $2p = 2\frac{b^2}{a}$  = хорде, проведенной через фокус параллельно директрисе. Полупараметр  $p$  есть ордината, соответствующая фокусу.

**4. Уравнения.** Уравнение, отнесенное к центру (рис. 13.18 и 13.19):

$$\text{эллипс} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (13.18)$$

$$\text{гипербола} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (13.19)$$

При  $a = b$  эллипс превращается в круг  $x^2 + y^2 = a^2$ , а гипербола — в равнобокую гиперболу  $x^2 - y^2 = a^2$ .

Уравнения в параметрической форме:

$$\text{эллипс} \quad x = a \sin t, \quad y = b \cos t \text{ или } x = a \cos t, \quad y = b \sin t, \quad (13.20)$$

$$\text{гипербола} \quad x = a \operatorname{cosect}, \quad y = b \operatorname{ctgt}. \quad (13.21)$$

**5. Касательная и нормаль.** Уравнения касательной и нормали в точке  $(x_1, y_1)$ , если уравнения кривых даны в форме (13.18, 13.19):

*касательная:*

$$\text{эллипс} \quad \frac{\xi x_1}{a^2} + \frac{\eta y_1}{b^2} = 1,$$

$$\text{гипербола} \quad \frac{\xi x_1}{a^2} - \frac{\eta y_1}{b^2} = 1;$$

*нормаль:*

$$\text{эллипс} \quad \frac{\xi - x_1}{b^2 x_1} = \frac{\eta - y_1}{a^2 y_1},$$

$$\text{гипербола} \quad \frac{\xi - x_1}{b^2 x_1} = -\frac{\eta - y_1}{a^2 y_1}.$$

Здесь  $\xi, \eta$  — текущие координаты касательной и нормали.

Свойство: касательная в любой точке эллипса или гиперболы делит пополам угол  $2\alpha$  между фокусными лучами, проведенными в эту точку; нормаль делит пополам дополнительный угол  $2\beta$  (рис. 13.18 и 13.19). Следовательно, касательную в данной точке можно построить как биссектрису угла  $2\alpha$ .

**6. Асимптоты гиперболы** (рис. 13.19). Если  $2\varphi$  — угол между асимптотами, то  $\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}$ . Уравнение асимптот:

$$\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0. \quad (13.22)$$

Асимптоты совпадают с диагоналями прямоугольника, имеющего стороны  $2a$  и  $2b$ .

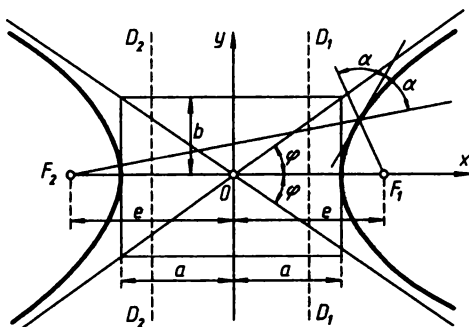


Рис. 13.19

Свойство: отрезки секущей, заключенные между асимптотами и ветвями гиперболы, равны между собой; отрезок касательной, заключенный между асимптотами, делится точкой касания пополам.

**7. Уравнение гиперболы в асимптотах** (косоугольные координаты):

$$xy = \text{const} \text{ или } xy = \frac{e^2}{4} = \frac{a^2 + b^2}{4} = \varepsilon^2 \frac{a^2}{4}.$$

В случае равнобокой гиперболы (рис. 13.20) асимптоты взаимно перпендикулярны ( $a=b$ ):

$$xy = \frac{a^2}{2}; \quad 2\varphi = 90^\circ; \quad e = \sqrt{2}; \quad 2p = 2a.$$

Заштрихованная площадь

$$F = \frac{1}{2} a^2 \ln \frac{x}{x_0}.$$

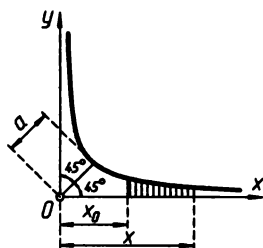


Рис. 13.20

**8. Длина фокусных лучей**, направленных к точке  $(x, y)$ , или радиусы-векторы точки  $(x, y)$ , если начало координат в центре (рис. 13.18 и 13.19):

для эллипса  $r_1 = F_1 P = a - \varepsilon x, \quad r_2 = F_2 P = a + \varepsilon x, \quad r_1 + r_2 = 2a;$

для гиперболы  $r_1 = F_1 P = \varepsilon x - a, \quad r_2 = F_2 P = \varepsilon x + a, \quad r_2 - r_1 = 2a.$

**9. Сопряженные диаметры.** Два диаметра эллипса или гиперболы называются сопряженными, если все хорды параллельные одному из них, делятся другим диаметром пополам (рис. 13.21). Касательные в конечных точках одного диаметра параллельны другому, сопряженному с ним диаметру.

Применение — в сопротивлении материалов (эллипс инерции, косой изгиб).

Если  $\alpha$  и  $\beta$  — углы, составляемые сопряженными диаметрами с главной осью  $2a$ , то

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = \mp \frac{b^2}{a^2} \begin{cases} \text{минус для эллипса} \\ \text{плюс для гиперболы.} \end{cases}$$

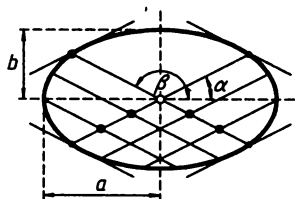


Рис. 13.21

Теоремы Аполлония. Если  $a_1$  и  $b_1$  — сопряженные полу-  
диаметры и  $\gamma$  — угол между ними ( $\gamma = \beta - \alpha$ , см. рис. 13.21), то

для эллипса  $a_1^2 + b_1^2 = a^2 + b^2$ ,  $a_1 b_1 \sin \gamma = ab$ ;

для гиперболы  $a_1^2 - b_1^2 = a^2 - b^2$ ,  $a_1 b_1 \sin \gamma = ab$ .

**10. Эволюта.** Уравнение эволюты эллипса и гиперболы:

$$\left(\frac{a\xi}{e^2}\right)^{\frac{2}{3}} \pm \left(\frac{b\eta}{e^2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1 \quad \begin{cases} \text{плюс для эллипса,} \\ \text{минус для гиперболы,} \end{cases} \quad (13.23)$$

где  $e$  — линейный эксцентриситет ( $e^2 = a^2 \mp b^2$ );  $\xi, \eta$  — текущие координаты эволюты.

### 13.3.4. Парабола

**1. Основные свойства.** Каждая точка параболы (рис. 13.22) находится на одинаковом расстоянии от фокуса ( $F$ ) и от директрисы ( $DD$ ). Директриса находится в расстоянии —  $\frac{p}{2}$  от вершины ( $2p$  — параметр,  $p$  — ордината фокуса). Все диаметры параболы параллельны ее оси (центр кривой в бесконечности).

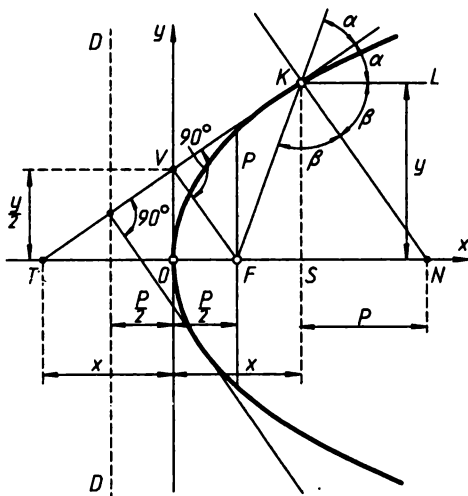


Рис. 13.22

**2. Уравнения параболы.** Уравнение, отнесенное к вершине и к оси (рис. 13.22),

$$y^2 = 2px. \quad (13.24)$$

Длина фокусного луча, направленного к точке  $K$ :

$$r = FK = x + \frac{p}{2}.$$

Уравнение, отнесенное к хорде, перпендикулярной к оси (рис. 13.23)

$$y = \frac{4x(l-x)f}{l^2}, \quad (13.25)$$

где  $f$  — стрелка параболы.

Полупараметр, выраженный через стрелку и хорду параболы

$$p = \frac{l^2}{8f}.$$

Следовательно, расстояние фокуса от вершины равно  $\frac{p}{2} = \frac{l^2}{16f}$ .

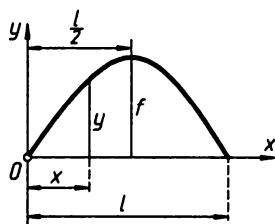


Рис. 13.23

Форма уравнения (13.25) удобна в применении к параболическим фермам (рис. 13.24, 13.25). Если  $n$  — число равных панелей в пролете и  $h_m$  — длина  $m$ -й стойки, то уравнение (13.25) можно представить в виде

$$h_m = \frac{4m(n-m)f}{n^2}. \quad (13.25a)$$

Зависимость между длиной наибольшей стойки  $h$  и стрелкой  $f$ :

при  $n$  четном (рис. 13.24)  $f = h_{\max}$ ,

при  $n$  нечетном (рис. 13.25)  $f = \frac{n^2}{n^2 - 1} h_{\max}$ .

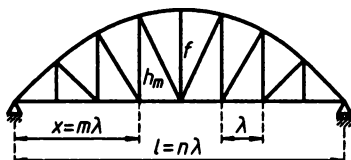


Рис. 13.24

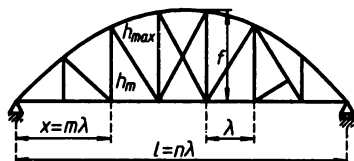


Рис. 13.25

Во всех случаях параболических ферм (рис. 13.26) при равных пролетах, равных стрелках и равных абсциссах  $x$  длина ординаты  $h$ , заключенной между осями поясов фермы, будет одна и та же:

$$h = \frac{4x(l-x)f}{l^2}.$$

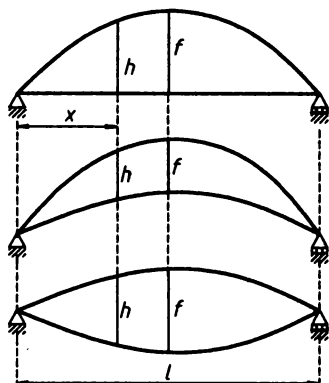


Рис. 13.26

### 3. Касательная и нормаль.

Если уравнение параболы дано в форме (13.24), то для точки  $(x_1, y_1)$  уравнение

касательной  $\eta y_1 = p(\xi + x_1),$

нормали  $\eta - y_1 = -\frac{y}{p}(\xi - x_1).$

**4. Длина дуги  $OK$**  параболы (рис. 13.22), считая от вершины до точки  $(x, y)$ :

$$\curvearrowright OK = s = \frac{p}{2} \left[ \frac{y}{p^2} \sqrt{p^2 + y^2} + \ln(y + \sqrt{p^2 + y^2}) - \ln p \right]$$

или приблизительно для пологой дуги:

$$\curvearrowright OK = s \approx y \left[ 1 + \frac{2}{3} \left( \frac{x}{y} \right)^2 - \frac{2}{5} \left( \frac{x}{y} \right)^4 \right].$$

**5. Радиус кривизны** в точке  $(x, y)$ :

$$R = \sqrt{\frac{(p+2x)^2}{p}};$$

в вершине радиус кривизны  $R = p$ .

**6. Эволюта.** Уравнение эволюты:

$$\eta^2 = \frac{8(\xi - p)^3}{27p}.$$

Это уравнение полукубической параболы (или параболы Нейля), где  $p$  — полупараметр данной параболы (эвольвенты). Если  $l$  — хорда, перпендикулярная к оси параболы, и  $h$  — стрелка, то  $p = \frac{l^2}{8h}$ .

**7. Площадь сегмента.** Площадь какого угодно параболического сегмента по численной величине (рис. 13.27):

$$F = \frac{(x_1 - x_2)}{12p}.$$

Пользуясь следующими зависимостями, можно довольно просто по чертежу определять площади параболических сегментов:

площадь сегмента  $K_1OK_2 = \frac{2}{3}$  площади  $E_1K_1K_2E_2$

площадь сегмента  $K_1OK_2 = \frac{2}{3}$  площади  $\Delta K_1TK_2$

площадь сегмента  $K_1OK_2 = \frac{4}{3}$  площади  $\Delta K_1MK_2$

площадь треугольника  $K_1MK_2 = 2$  площадям  $\Delta N_1TN_2$ .

На рис. 13.27 прямая  $OY$  — ось параболы,  $TM \parallel OY$ ,  $E_1E_2$  — касательная к параболе в точке  $M$  ( $E_1E_2 \parallel K_1K_2$ ),  $K_1E_1 \parallel K_2E_2 \parallel OY$ . Для контроля построения могут служить следующие равенства:

$$K_1S = SK_2, \quad N_1M = MN_2, \quad TM = MS, \quad TN_1 = N_1K_1, \quad TN_2 = N_2K_2.$$

Вышеуказанные свойства параболы могут служить также для приближенного определения площадей, ограниченных какими угодно пологими кривыми.

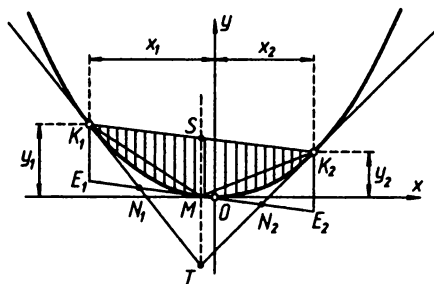


Рис. 13.27

## 13.4. Алгебраические кривые высших порядков

### 13.4.1. Кубическая парабола

Уравнение кривой, отнесенное к вершине (рис. 13.28):

$$y^3 = mx.$$

Кривая расположена в 1-й и 3-й четверти и имеет в начале координат точку перегиба. Подкасательная  $ST = 3x_1$ , причем  $OT = 2x_1$ ,  $OV = \frac{2}{3}y_1$ , — отсюда ясен способ построения касательной в данной точке  $K$ .

Если уравнение имеет вид  $y = mx^3$ , то кривая расположена как показано на рис. 13.29.

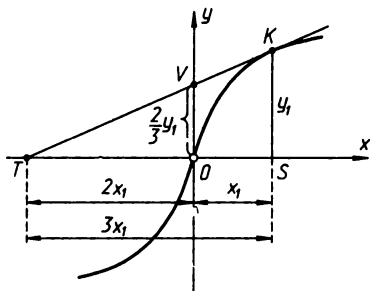


Рис. 13.28

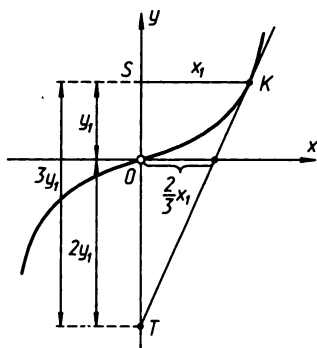


Рис. 13.29

### 13.4.2. Полукубическая парабола (парабола Нейля)

Уравнение кривой, отнесенное к вершине (рис. 13.30):

$$y^{\frac{3}{2}} = mx \quad \text{или} \quad y^3 = m_1 x^2.$$

Кривая расположена в 1-й и 2-й четверти и имеет в вершине точку возврата первого рода. Подкасательная  $ST = \frac{3}{2}x_1$ , причем  $OT = \frac{x_1}{2}$ ,  $OV = \frac{y_1}{3}$ . По этим данным легко построить касательной в данной точке  $K$ .

Если кривая задана уравнением имеет вид  $y^{\frac{3}{2}} = mx$  или  $y^2 = m_1 x^3$ , то она расположена в 1-й и 4-й четверти (рис. 13.31).

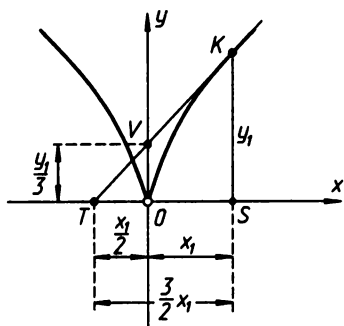


Рис. 13.30

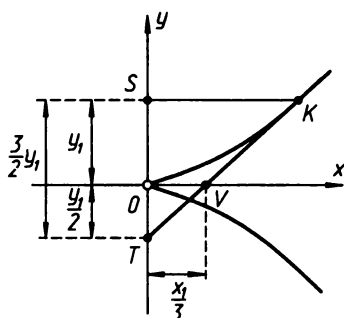


Рис. 13.31

### 13.4.3. Декартов лист

Декартов лист, наряду с другими кривыми 3-го порядка, имеет интересное применение в номографии (кубические номограммы).

Уравнение кривой (рис. 13.32):

в прямоугольных координатах

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0;$$

в полярных координатах

$$\rho = \frac{3}{2} \frac{a \sin 2\theta}{\sin^3 \theta + \cos^3 \theta}.$$

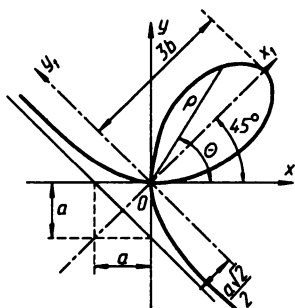


Рис. 13.32

Кривая образует петлю и имеет асимптоту. Если совместить ось  $Ox$  с осью симметрии  $Ox_1$ , повернув координатную систему на  $45^\circ$ , то уравнение кривой примет вид

$$x_1^3 - 3b(x_1^2 - y_1^2) + 3x_1 y_1^2 = 0,$$

где  $3b = \frac{3}{2} a \sqrt{2}$  = длина петли.

### 13.4.4. Общее уравнение линий 3-го порядка

Общее уравнение линий 3-го порядка, симметричных относительно оси  $Ox$ :

$$y^2 (\alpha x + \beta) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

При разных частных значениях коэффициентов  $a, b, c, d, \alpha, \beta$  будут получаться разные виды линий 3-го порядка, имеющие ось симметрии (ось  $OX$ ). Сюда относятся полукубическая парабола и декартов лист и, кроме того, строфоида, циссоида Диоклеса и др.

### 13.4.5. Кривые Кассини или лемнискаты

Кривая Кассини имеет два фокуса  $F_1$  и  $F_2$  (рис. 13.33); произведение расстояний точек кривой от этих фокусов равно постоянному числу  $c^2$ . Если  $f$  — линейный эксцентриситет, то уравнение кривой:

в прямоугольных координатах  $(x^2 + y^2 + f^2)^2 = c^4 + 4f^2 x^2$ ;

в полярных координатах  $\rho^4 - 2f^2 \rho^2 \cos 2\theta = c^4 - f^4$ .

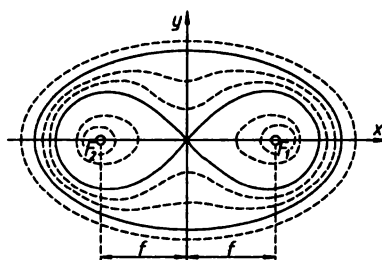


Рис. 13.33

Рисунок 13.33 дает представление о разновидностях лемнискаты. Если  $c < f$ , то кривая состоит из двух отдельных овалов, окружающих фокусы. При  $c > f$  кривая имеет одну замкнутую ветвь. При  $c = f$  кривая имеет вид петли  $\infty$  и называется лемнискатой Бернулли; ее уравнение

$$(x^2 + y^2)^2 = 2f^2(x^2 - y^2)$$

или в полярных координатах

$$\rho^2 = 2f^2 \cos 2\theta;$$

полуось  $a = f\sqrt{2}$ ,  $a^2 = 2f^2$ ; площадь, ограниченная обеими петлями  $= a^2$ :

Лемниската Бернулли есть геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из центра равнобокой гиперболы на различные ее касательные (рис. 13.34), причем фокусы лемнискаты совпадают с точками пересечения директ-

рис ( $D_1D_1$  и  $D_2D_2$ ) гиперболы с ее вещественной осью. Обе ветви лемнискаты пересекаются в центре под прямым углом и имеют в этой точке две касательные, совпадающие с асимптотами гиперболы.

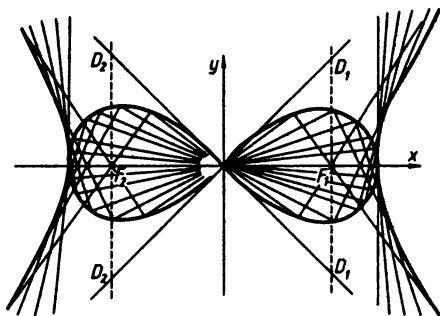


Рис. 13.34

### 13.4.6. Конхоиды

Если через постоянную точку (полюс) проводить лучи, пересекающие произвольную прямую или кривую (базис) и на этих лучах в обе стороны от базиса откладывать один и тот же отрезок, то получится кривая, называемая конхойдой. В зависимости от формы базиса различают кривые:

- 1) с прямолинейным базисом — конхоида Никомеда;
- 2) с круговым базисом — улитка Паскаля;
- 3) с параболическим базисом и т. д.

Конхоида Никомеда (рис. 13.35). Базис — прямая  $BB$ ; начало координат в полюсе  $P$ , отстоящим от базиса в расстоянии  $b$ ; откладываемый отрезок  $= a$ .

Уравнение конхоиды Никомеда

$$(x^2 + y^2)(x - b)^2 = a^2 x^2 \quad \text{или} \quad \rho = \frac{b}{\cos \theta} \pm a.$$

Кривая имеет две ветви  $K_1K_1$  и  $K_2K_2$ . Базис является асимптотой кривой. Получаются три различные формы кривой соответственно трем случаям  $a < b$ ,  $a > b$ ,  $a = b$ . В последнем случае ветвь  $K_2K_2$  проходит через полюс, а во втором случае ( $a > b$ ) — образует в полюсе петлю.

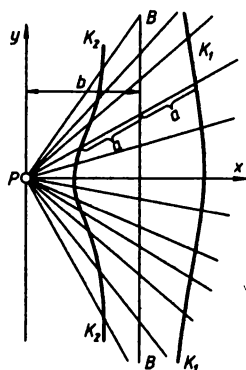


Рис. 13.35

## 13.5. Трансцендентные кривые

### 13.5.1. Спирали

**1. Спираль Архимеда** (линейная спираль). Если точка движется равномерно по радиусу-вектору, который вращается равномерно вокруг полюса, то эта точка описывает *спираль Архимеда* (рис. 13.36).

Ее полярное уравнение:

$$\rho = a\theta \text{ или } \rho = \frac{\rho_0}{2\pi}\theta,$$

где  $a = \frac{\rho_0}{2\pi}$  — радиус-вектор при  $\theta = 1$ , кроме того  $\rho_0 = OA$  — радиус-вектор при  $\theta = 2\pi = 360^\circ$ . Спираль выходит из полюса и делает около него бесконечное число оборотов.

Если точка движется равномерно по образующей прямого кругового конуса, который вращается равномерно вокруг оси, то эта точка описывает коническую винтовую линию, — ее проекция на основание конуса есть спираль Архимеда.

Полярная поднормаль спирали Архимеда есть величина постоянная, а именно  $ON = \frac{d\rho}{d\theta} = a$ . Полярная подкасательная  $OT = \frac{\rho^2 d\theta}{d\rho} = \frac{\rho^2}{a} = a\theta^2$ .

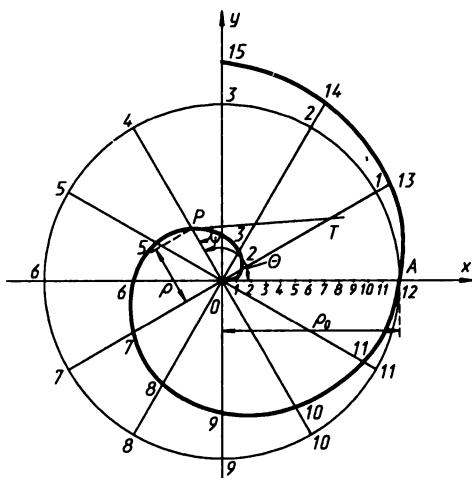


Рис. 13.36

Если  $\psi$  — угол между касательной и радиусом-вектором, то  $\operatorname{tg} \psi = \frac{\rho d\theta}{d\rho} = \frac{\rho}{a} = \theta$ . Радиус кривизны

$$R = \frac{(a^2 + \rho^2)^{\frac{3}{2}}}{2a^2 + \rho^2} = \frac{N^3}{N^2 + a^2},$$

где  $N$  — полярная нормаль.

Длина дуги

$$s = \frac{a}{2} (\theta \sqrt{1 + \theta^2} + \operatorname{Arsh} \theta) = \frac{a}{2} [\theta \sqrt{1 + \theta^2} + \ln (\theta + \sqrt{1 + \theta^2})].$$

При большом числе витков приблизительно

$$s \approx \frac{1}{2} a \theta^2.$$

**Построение спирали Архимеда.** Так как радиусы-векторы спирали Архимеда возрастают пропорционально углам ( $\rho = a\theta$ ), то для нахождения точек кривой задаемся отрезком  $\rho = OA$  (рис. 13.36) и делим его на равные части (например, на 12); на столько же частей делим окружность, описанную произвольным радиусом; проводим лучи  $01, 02$  и т. д. и на них откладываем от полюса последовательно  $\frac{1}{12}\rho_0, \frac{2}{12}\rho_0, \frac{3}{12}\rho_0$  и т. д., — таким путем можем получить какое угодно число точек спирали.

## 2. Логарифмическая спираль

(Иван Бернулли). Полярное уравнение кривой (рис. 13.37):

$$\rho = ae^{m\theta},$$

где  $m > 0$  и  $a = \rho = OA$  при  $\theta = 0$ .

Так как при  $\theta = -\infty$  радиус-вектор  $\rho = 0$ , то полюс есть асимптотическая точка, вокруг которой спираль делает бесчисленное множество оборотов, никогда ее не достигая. Во всех точках логарифмической спирали касательная составляет один и тот же угол  $\alpha$  с радиусом-вектором ( $\operatorname{ctg} \alpha = m$ ), поэтому нож, очерченный по логарифмической спирали, при вращении вокруг полюса врезается в предмет под постоянным углом (применение — в фрезерном деле, в соломорезках и пр.).

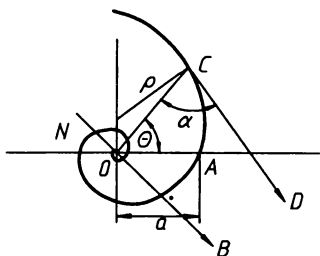


Рис. 13.37

Полярная нормаль  $CN = \rho \sqrt{1+m^2} = \frac{\rho}{\sin \alpha}$  = радиус кривизны в точке  $C$ . Полярная поднормаль  $ON = \rho \operatorname{ctg} \alpha$ . Длина дуги  $s$  от точки  $C$  до полюса равна полярной касательной  $= \frac{\rho}{\cos \alpha}$ . Эволюта логарифмической спирали есть та же самая спираль, но повернутая на угол  $\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{\ln m}{m}$ ; если  $m$  выбрано так, что  $\varphi = 2k\pi$  ( $k$  — целое число), то эволюта совмещается с данной спиралью; это будет, например, при  $m = 0,274412$ , при этом  $\alpha = 74^\circ 39' 18''$ ,  $\varphi = 2\pi$  ( $k=1$ ).

**3. Гиперболическая спираль.** Полярное уравнение кривой:

$$a = \rho \theta.$$

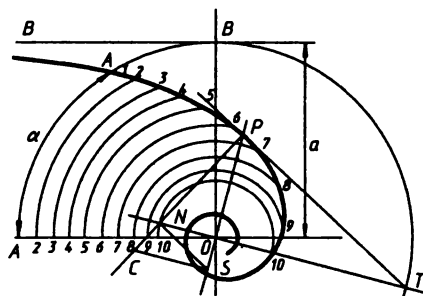


Рис. 13.38

Полюс есть асимптотическая точка. Спираль имеет асимптоту  $BB$ , параллельную полярной оси, в расстоянии  $a$  от нее (рис. 13.38). Полярная подкасательная есть величина постоянная  $= -a$ . Полярная поднормаль  $= \frac{\rho^2}{a}$ . Радиус кривизны:

$$R = \rho \left( \frac{\rho^2}{a^2} + 1 \right)^{3/2}.$$

### 13.5.2. Циклические кривые

**1. Развертка круга (эвольвента).** Если прямая катится без скольжения по неподвижной окружности, то точки прямой описывают эвольвенты.

Параметрические уравнения эвольвенты (рис. 13.39):

$$\left. \begin{aligned} x &= r(\cos t + t \sin t) \\ y &= r(\sin t - t \cos t) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{начало координат в центре круга;} \\ &r — \text{радиус круга; } t — \text{параметр (угол).} \end{aligned}$$

Полярное уравнение:

$$\theta = \sqrt{\frac{\rho^2 - r^2}{r^2}} - \arctg \sqrt{\frac{\rho^2 - r^2}{r^2}}.$$

### Построение эвольвенты.

Отрезок  $BC$  — выпрямленная полуокружность. Делим полуокружность и  $BC$  на одинаковое число равных частей. На касательной в точке  $I$

откладываем  $I\alpha = Ct = \frac{1}{4}BC$ , на ка-

сательной в точке  $II$  — отрезок  $II\beta = C2 = \frac{1}{2}BC$  и т. д. Радиус кривизны в точке  $P$  равен длине касательной  $PT$ , или длине дуги  $AT$ .

**2. Циклоида.** Если круг катится без скольжения по неподвижной прямой, то любая точка окружности описывает циклоиду (рис. 13.40).

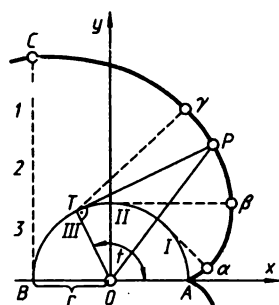


Рис. 13.39

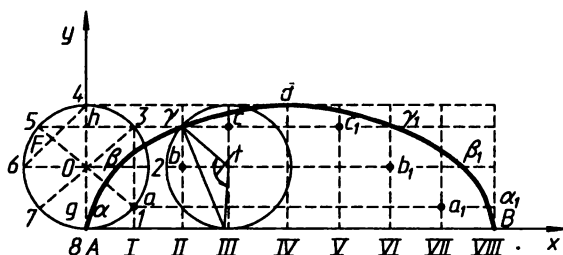


Рис. 13.40

Уравнения циклоиды:

$$\left. \begin{aligned} x &= r(t - \sin t) \\ y &= r(1 - \cos t) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &r — \text{радиус катящегося круга; } t — \text{пара-} \\ &\text{метр (угол поворота радиуса круга).} \end{aligned}$$

или

$$x = r \arccos \frac{r-y}{r} \pm \sqrt{(2r-y)y}.$$

Эволюта циклоиды есть та же самая циклоида, но иначе расположенная (сдвинута на  $\pi r$  в положительном направлении оси  $Ax$  и на  $2r$  в отрицательном направлении оси  $Ay$ ).

Площадь, ограниченная осью  $Ax$  и полной дугой циклоиды  $= 3\pi r^2$ . Длина полной дуги циклоиды  $= 8r$ . Радиус кривизны  $R = 4r \sin \frac{t}{2} = 2\sqrt{2y}$ ; в вершине ( $d$ ) радиус кривизны  $R = 4r$ , в начале ( $A$ )  $R = 0$ .

**Построение циклоиды** (рис. 13.40). Делим окружность катящегося круга на произвольное число равных частей (1–8) и проводим через точки деления прямые, параллельные направляющей  $AB$ . На  $AB$  откладываем длину окружности круга (равную приблизительно трем диаметрам плюс  $1/5$  стороны описанного квадрата), которую разделим на то же число равных частей, как и круг (I–VIII). Восстанавливаем перпендикуляры в I, II, III... и получаем точки пересечения  $a, b, c...$  Затем откладываем  $a\alpha = g\gamma$ ,  $b\beta = 0\delta$  и  $c\gamma = h\delta$ . Эти точки  $\alpha, \beta, \gamma...$  соединяем непрерывной кривой, которая в  $d$  имеет вершину и на правой стороне настолько же удаляется от  $a_1, b_1, c_1...$  вправо, насколько с левой стороны от  $a, b, c...$  влево.

**3. Эпициклоида и гипоциклоида.** Если круг катится без скольжения по неподвижной окружности, то любая точка окружности катящегося круга описывает эпициклоиду при катании снаружи неподвижного круга (рис. 13.41) и гипоциклоиду при катании внутри неподвижного круга (рис. 13.42).

В следующих уравнениях верхние знаки относятся к эпициклоиде, а нижние — к гипоциклоиде,

$$\left. \begin{aligned} x &= (a \pm r) \cos \frac{r}{a} t \mp r \cos \left( \frac{a \pm r}{a} t \right) \\ y &= (a \pm r) \sin \frac{r}{a} t \mp r \sin \left( \frac{a \pm r}{a} t \right) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &r — \text{радиус катящегося круга;} \\ &a — \text{радиус неподвижного круга;} \\ &t — \text{параметр (угол поворота радиуса круга).} \end{aligned}$$

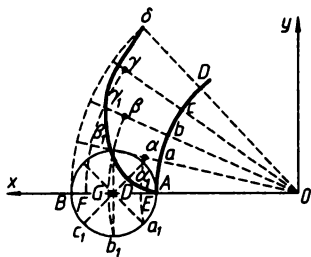


Рис. 13.41

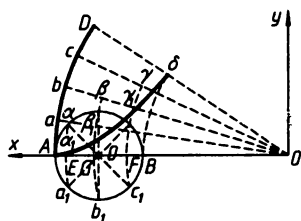


Рис. 13.42

**Построение эписциклоиды** (рис. 13.41). Круг радиуса  $OA$  катится по окружности  $AD$ , центр которой в  $C$ ; откладываем дугу  $AD =$  дуге  $AB$ . Делим дуги  $AB$  и  $AD$  на одинаковое число равных частей и чертим дуги из центра  $C$  через  $a_1, b_1, c_1, \dots$  и проводим из  $C$  радиусы  $Ca, Cb, Cc$ ; получим точки пересечения  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ , от которых откладываем вниз  $\alpha\alpha_1 = Ea_1, \beta\beta_1 = Gb_1, \gamma\gamma_1 = Fc_1$  и т.д.; точки  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \dots$  соединяем и получаем эписциклоиду. Другая часть ее симметрична с этой относительно оси  $C\delta$ , следовательно, нужно только отложить те же деления на другой стороне.

**Построение гипоциклоиды** (рис. 13.42). Круг радиуса  $OA$  катится внутри окружности  $AD$ , описанной из центра  $C$ ; откладываем дугу  $AD =$  дуге  $AB$ . Делим обе дуги на одинаковое число равных частей; из  $C$  как из центра проводим дуги через  $a_1, b_1, c_1$ , и радиусы — через  $a, b, c$ . Получаем точки  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ , от которых откладываем вниз  $\alpha\alpha_1 = Ea_1, \beta\beta_1 = Gb_1, \gamma\gamma_1 = Fc_1$  и т.д. Соединяем точки  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \dots$  непрерывной линией и получаем гипоциклоиду. Другая ее половина симметрична с первой относительно оси  $C\delta$ .

Частные случаи.

При  $r = \infty$  эписциклоида превращается в развертку круга радиуса  $a$ .

При  $r = a$  эписциклоида превращается в кардиоиду.

При  $r = \frac{a}{4}$  гипоциклоида превращается в равнобокую астроиду, уравнение которой:  $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ .

При  $r = \frac{a}{2}$  гипоциклоида превращается в прямую линию, совпадающую с диаметром неподвижного круга; при этом каждая точка диаметра производящего круга описывает эллипс.

**4. Трохоиды.** Если круг катится по неподвижной прямой, то точки, лежащие внутри или вне круга и неизменным образом с ним связанные, описывают трохойды (иногда их называют укороченными и удлинненными циклоидами). При качении круга *снаружи* другого неподвижного круга получаются *эпитрохоиды*, а при качении *внутри* неподвижного круга — *гипотрохоиды*. Таким образом, циклоида, эписциклоида и гипоциклоида являются частными случаями трохойд.

Форма кривых изменится, если катание будет сопровождаться скольжением.

**5. Рулетты.** Если вообще какая-либо кривая  $A$  катится без скольжения по неподвижной плоской кривой  $B$ , то любая точка, неизменно соединенная с кривой  $A$ , описывает кривую, называемую *рулеттой*. Циклоиды и трохоиды являются частными случаями рулетт: в них кривая  $A$  есть круг, а  $B$  — прямая линия.

Если парабола катится без скольжения по неподвижной прямой, то ее фокус чертит *цепную линию*.

### 13.5.3. Цепная линия

**1. Уравнения и основные соотношения.** Кривая, по которой свешивается тяжелая совершенно гибкая однородная нить, укрепленная в двух точках, называется *обыкновенной цепной линией* (рис. 13.43).

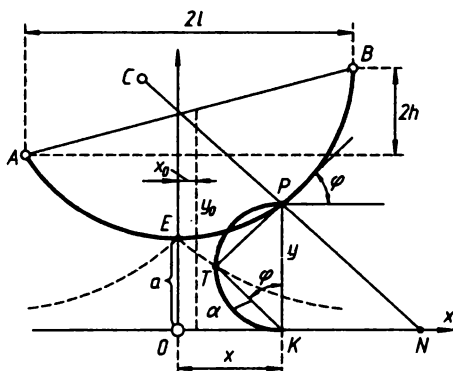


Рис. 13.43

**Обозначения:**  $a$  — параметр, равный расстоянию вершины кривой от оси  $OX$  (директрисы);  $s$  — длина дуги от вершины  $E$  до точки  $P$  с абсциссой  $x$ ;  $F$  — площадь, ограниченная ординатами  $a$  и  $y$ , осью  $OX$  и дугой  $s$ ;  $\varphi$  — угол, составляемый касательной с осью  $OX$ .

Уравнение кривой:

$$y = \frac{a}{2} \left( e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right) \quad \text{или} \quad x = a \ln \left( \frac{y}{a} \pm \sqrt{\frac{y^2 - a^2}{a^2}} \right),$$

$$\text{или} \quad x = a \ln \left( \frac{s}{a} \pm \sqrt{\frac{y^2 + s^2}{a^2}} \right).$$

Длина дуги  $EP = s = \frac{a}{2} \left( e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right) = \sqrt{y^2 - a^2}$  = катету  $PT$  прямо-

угольного треугольника  $PTK$ , у которого гипотенуза равна ординате  $y$  и другой катет  $KT$  равен параметру  $a$  ( $PT$  — касательная в точке  $P$ ).

Площадь  $OEPK = F = sa = a^2 \operatorname{tg} \varphi$ ;

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \left( e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right) = \frac{s}{a} = \sqrt{\frac{y^2 - a^2}{a^2}}.$$

Радиус кривизны  $R = CP = \frac{y^2}{a} = PN$ , т. е. радиус кривизны равен длине нормали; в вершине кривой  $R = a$ .

Уравнение цепной линии можно выразить также при помощи гиперболических функций, а именно:

$$y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a} \quad \text{или} \quad x = a \operatorname{Arch} \frac{y}{a}, \quad \text{или} \quad x = a \operatorname{Arsh} \frac{s}{a},$$

следовательно,  $s = a \operatorname{sh} \frac{x}{a}$  и  $F = a^2 \operatorname{sh} \frac{x}{a}$ .

**Построение цепной линии.** Если параметр  $a$  задан, то ординаты точек цепной линии легко определяются при помощи таблицы гиперболических косинусов. Задаваясь различными значениями  $\xi = \frac{x}{a}$ , будем находить координаты  $x = a\xi$  и  $y = a \operatorname{ch} \xi$ .

Если параметр  $a$  неизвестен, но даны  $2s$  — полная длина цепной линии,  $2l$  — горизонтальное расстояние между точками подвеса и  $2h$  — вертикальное расстояние между теми же точками, то вычисляем путем подбора вспомогательный аргумент  $\beta$  из уравнения

$$\frac{\operatorname{sh} \beta}{\beta} = \frac{\sqrt{s^2 - h^2}}{l}$$

и находим параметр цепной линии  $a = \frac{l}{\beta}$ ; далее определяем координаты середины хорды  $AB$

$$y_0 = s \operatorname{cth} \beta \quad \text{и} \quad x_0 = \omega a,$$

причем  $\omega$  находим из уравнения  $\operatorname{th} \omega = \frac{h}{s}$ . Начало координат лежит на глубине  $y_0$  под серединой хорды  $AB$  и сдвинуто от этой середины на величину  $x_0$  в сторону более низкой точки подвеса.

Если точки подвеса на одном горизонте, то  $h=0$ ,  $\omega=0$ ,  
 $x_0=0$  и  $\frac{\text{sh}\beta}{\beta} = \frac{s}{l}$ .

Ординаты цепной линии можно вычислять также при помощи таблицы функций  $e^{\frac{x}{a}}$  и  $e^{-\frac{x}{a}}$  или при помощи суммирования рядов, получающихся при разложении функций  $e^{\frac{x}{a}}$  и  $e^{-\frac{x}{a}}$ :

$$y = \frac{a}{2} \left( e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right) = a \left( 1 + \frac{1}{2!} \frac{x^2}{a^2} + \frac{1}{4!} \frac{x^4}{a^4} + \frac{1}{6!} \frac{x^6}{a^6} + \dots \right).$$

Если отношение  $\frac{x}{a}$  — весьма малая величина, то пренебрегая высшими степенями этого отношения, получим уравнение параболы:

$$y = a + \frac{x^2}{2a} \quad \text{или} \quad x^2 = 2a(y - a).$$

**2. Механические свойства цепной линии.** Касательное усилие в какой-либо точке вполне гибкой однородной нити, подвешенной в двух точках, равно весу куска нити, имеющей длину, равную ординате  $y$  этой точки, т. е.  $T = qy$ , где  $q$  — вес единицы длины нити.

В вершине кривой усилие наименьшее  $H = qa$ . Следовательно, параметр  $a = \frac{H}{q}$ . Горизонтальная составляющая усилия  $T$  в любой точке кривой есть величина постоянная, равная  $H = qa$ , следовательно,  $T = \frac{H}{\cos\varphi} = H \sec\varphi$ . Вертикальная составляющая  $V = qs$ . Уравнение цепной линии, выраженное через  $q$  и  $H$ :

$$y = \frac{H}{2q} \left( e^{\frac{qx}{H}} + e^{-\frac{qx}{H}} \right).$$

В общем случае получаются следующие уравнения равновесия гибкой нити (веревочной кривой) под действием каких-либо сил, дающих на три взаимно перпендикулярные оси координат суммы проекций  $X, Y, Z$ :

$$\frac{d}{ds} \left( T \frac{dx}{ds} \right) + X = 0, \quad \frac{d}{ds} \left( T \frac{dy}{ds} \right) + Y = 0, \quad \frac{d}{ds} \left( T \frac{dz}{ds} \right) + Z = 0.$$

Если стрела провеса нити мала в сравнении с ее длиной, то цепную линию можно заменить параболой, имеющей уравнение:

$$y = a + \frac{x^2}{2a} \quad \text{или} \quad y = \frac{H}{q} + \frac{qx^2}{2H},$$

или, если начало координат в вершине кривой,

$$y = \frac{qx^2}{2H} \quad \text{или} \quad x^2 = 2 \frac{H}{q} y.$$

Такая замена равносильна допущению, что на нить действует нагрузка, равномерно распределенная по горизонтальной проекции нити.

**3. Цепная линия как руллета параболы.** Если парабола, имеющая параметр  $2p$ , катится без скольжения по прямой линии, то ее фокус чертит цепную линию, параметр которой равен  $1/4$  параметра параболы, т. е.  $a = \frac{p}{2}$ .

**4. Траектория Гюйгенса.** Эвольвента цепной линии есть траектория Гюйгенса (или антифрикционная кривая, рис. 13.43); все ее касательные имеют постоянную длину (от точки касания до оси  $OX$ ), равную параметру  $a$  цепной линии. Директриса ( $OX$ ) цепной линии есть асимптота траектории (на рис. 13.43 траектория показана пунктиром).

Уравнение траектории:

$$xy = a \ln(a + \sqrt{a^2 - y^2}) - y \sqrt{a^2 - y^2}.$$

**5. Катеноид** (проекция цепной линии). Кривая под названием катеноид предложена инженером Legay — как кривая давления — для очертания оси свода.

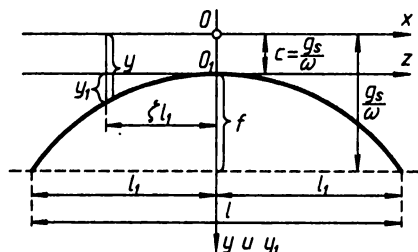


Рис. 13.44

Уравнение кривой, отнесенное к оси симметрии  $OY$  при начале координат в точке  $O$ , взятой выше центра замка свода на величину  $c$ , равную высоте приведенной нагрузки свода в замке (рис. 13.44):

$$y = c \operatorname{ch} \frac{x}{q},$$

где  $c = \frac{g_s}{\omega} = \frac{f}{m-1}$  и  $\operatorname{ch}$  — гиперболический косинус, причем  $m = \frac{\text{постоянная нагрузка в пяте}}{\text{постоянная нагрузка в замке}} = \frac{g_k}{g_s}$ ;  $\omega$  — вес  $1 \text{ м}^3$  приведенной нагрузки свода;  $f$  — стрела свода и

$$q = \frac{l}{2 \operatorname{Arch} m} = \frac{l}{2 \ln(m + \sqrt{m^2 - 1})}.$$

При осях координат  $O_1Z$  и  $O_1Y_1$  уравнение катеноида принимает вид (Штрасснер):

$$y_1 = \frac{f}{m-1} (\operatorname{ch} \zeta k - 1),$$

где  $\zeta = \frac{z}{l_1}$ ;  $l_1 = \frac{l}{2}$ ;  $k = \operatorname{Arch} m = \ln(m + \sqrt{m^2 - 1})$ ;  $m$  — указано выше.

Обычно, вместо теоретических кривых, строят достаточно близко к ним подходящие коробовые кривые.

## 14. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

Обозначения:  $O$  — начало прямоугольных координат;  $x, y, z$  — координаты точки  $P$  в пространстве; отрезок  $OP = r$ ;  $\alpha, \beta, \gamma$  — углы, составляемые прямой  $OP$  с положительными направлениями координатных осей.

### 14.1. Одна точка

Координаты точки  $P$  суть проекции  $OP$  на оси координат, т. е.

$$x = r \cos \alpha, \quad y = r \cos \beta, \quad z = r \cos \gamma,$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; \quad \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

### 14.2. Две точки

Расстояние между точками  $P_1(x_1, y_1, z_1)$  и  $P_2(x_2, y_2, z_2)$ :

$$l = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Косинус угла между двумя направлениями  $OP_1 = r_1$  и  $OP_2 = r_2$ :

$$\cos(r_1, r_2) = \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2.$$

### 14.3. Плоскость

Уравнение плоскости в общей форме:

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Если плоскость проходит через начало координат ( $D = 0$ ), то

$$Ax + By + Cz = 0.$$

Уравнение плоскости в отрезках ( $a, b, c$ ), отсекаемых на осях координат:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

#### 14.4. Кривая в пространстве

Кривая задается или как линия пересечения двух поверхностей

$$F(x, y, z)=0, \quad f(x, y, z)=0,$$

или проекциями кривой на две координатные плоскости, например, на плоскости  $xy$  и  $xz$ :

$$y=\varphi_1(x), \quad z=\varphi_2(x),$$

или в параметрической форме ( $t$  — параметр):

$$x=f_1(t), \quad y=f_2(t), \quad z=f_3(t).$$

Дифференциал дуги:

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}=\sqrt{1+y'^2+z'^2} dx.$$

Направляющие косинусы, или косинусы углов  $\alpha, \beta, \gamma$ , составляемых положительным направлением касательной с осями координат (касательная направлена в сторону возрастания дуги):

$$\cos\alpha=\frac{dx}{ds}, \quad \cos\beta=\frac{dy}{ds}, \quad \cos\gamma=\frac{dz}{ds}.$$

Уравнение касательной к кривой в точке  $(x, y, z)$ :

$$\frac{\xi-x}{dx}=\frac{\eta-y}{dy}=\frac{\zeta-z}{dz},$$

где  $\xi, \eta, \zeta$  — текущие координаты.

Уравнение нормальной плоскости в точке  $(x, y, z)$ :

$$(\xi-x)dx+(\eta-y)dy+(\zeta-z)dz=0.$$

Уравнение плоскости кривизны (соприкасающейся плоскости):

$$(\xi-x)A+(\eta-y)B+(\zeta-z)C=0,$$

где

$$A=dyd^2z-dzd^2y, \quad B=dzd^2x-dxd^2z, \quad C=dxd^2y-dyd^2x.$$

$$A^2+B^2+C^2=D^2=ds^2[(d^2x)^2+(d^2y)^2+(d^2z)^2].$$

Направляющие косинусы бинормали  $b$ :

$$\cos(b, x) = \frac{A}{D}, \quad \cos(b, y) = \frac{B}{D}, \quad \cos(b, z) = \frac{C}{D}.$$

Угол  $d\varphi$  между двумя бесконечно близкими касательными:

$$d\varphi = \frac{D}{ds^2}.$$

Первая кривизна кривой  $\frac{1}{R_1} = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{L}{ds^3}$ .

Вторая кривизна или кручение кривой

$$\frac{1}{R_2} = \frac{Ad^3x + Bd^3y + Cd^3z}{D^2}.$$

Если  $\frac{1}{R_2} = 0$ , то имеем плоскую кривую.

Первая кривизна характеризует степень быстроты удаления кривой от касательной, а вторая кривизна — степень быстроты отклонения кривой от плоскости кривизны.

**Винтовая линия.** Если точка движется равномерно по образующей кругового цилиндра, а цилиндр вращается равномерно вокруг своей оси, то такая точка описывает в пространстве цилиндрическую винтовую линию.

Уравнения цилиндрической винтовой линии:

$$x = acost, \quad y = asint, \quad z = \frac{h}{2\pi}t,$$

где  $a$  — радиус цилиндра и  $h$  — шаг винта; при  $0 \leq t \leq 2\pi$  получаем первый оборот винта, при  $2\pi \leq t \leq 4\pi$  — второй оборот и т. д.

Длина дуги

$$s = \frac{t}{2\pi} \sqrt{h^2 + 4\pi^2 a^2}.$$

Оба радиуса кривизны винтовой линии — величины постоянные, а именно:

$$R_1 = \frac{4\pi^2 a^2 + h^2}{4\pi^2 a}, \quad R_2 = \frac{4\pi^2 a^2 + h^2}{4\pi^2 h},$$

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{h}{2\pi a}.$$

**Построение проекции винтовой линии.** Делим высоту хода винтовой линии (шаг винта) и окружность цилиндра на одинаковое число равных частей (рис. 14.1); через точки деления шага проводим прямые параллельно основанию цилиндра; точки деления окружности проектируем на соответствующие прямые; соединяя полученные таким образом точки непрерывной кривой, получим вертикальную проекцию винтовой линии.

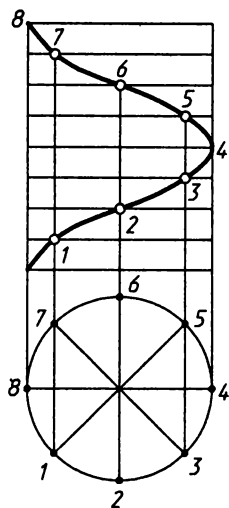


Рис. 14.1

## 14.5. Поверхности

Поверхность задается уравнением

$$F(x, y, z) = 0 \text{ (неявная форма),}$$

или

$$z = f(x, y) \text{ (явная форма),}$$

или тремя уравнениями

$$x = \varphi_1(u, v), \quad y = \varphi_2(u, v), \quad z = \varphi_3(u, v).$$

### 1. Обыкновенная винтовая поверхность:

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = \frac{h}{2\pi} v \quad \text{или} \quad z = \frac{h}{2\pi} \arctg \frac{y}{x};$$

кривые  $u = \text{const}$  — винтовые линии с шагом  $h$ ,  $v = \text{const}$  — прямые, перпендикулярные к оси  $z$ .

### 2. Поверхности вращения:

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = f(u) \quad \text{или} \quad z = f(\sqrt{x^2 + y^2}).$$

Кривые  $u = \text{const}$  — круги широты,  $v = \text{const}$  — меридианы,  $z = f(u)$  — уравнение образующей кривой.

При вращении кривой  $y = f(x)$  вокруг оси  $x$ -ов:

$$\text{поверхность тела вращения} \quad M = 2\pi \int y ds,$$

$$\text{объем тела вращения} \quad V = \pi \int y^2 dx.$$

Поверхности и объемы тел вращения можно определять также на основании теорем Гульдена.

**3. Поверхности второго порядка.** Уравнения относительно центра (начало координат в центре; направления осей совпадают с направлениями главных осей  $2a$ ,  $2b$ ,  $2c$ ).

$$\text{Эллипсоид} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

$$\text{при } a=b=c=r \text{ шар} \quad x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

$$\text{Однополостный гиперболоид} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

$$\text{Двуполостный гиперболоид} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Уравнения относительно вершин (плоскость  $xu$  касается параболоида в начале координат, совпадающей с вершиной).

$$\text{Эллиптический параболоид} \quad \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} = z.$$

$$\text{Гиперболический параболоид} \quad \frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q} = z.$$

$2p$  и  $2q$  — параметры парабол главного сечения.

#### 14.6. Общее уравнение конуса

Общее уравнение конуса

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz = 0.$$

Прямой конус (вершина — в начале координат, основание параллельно плоскости  $xu$ ,  $h$  — высота конуса):

$$\text{круглый конус} \quad \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = \frac{z^2}{h^2} \quad (r — \text{радиус основания});$$

$$\text{эллиптический конус} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{h^2} \quad (a \text{ и } b — \text{полуоси основания}).$$

#### 14.7. Эллиптический или гиперболический наклонный цилиндр

Эллиптический или гиперболический наклонный цилиндр:

$$\frac{1}{a^2} \left( x - z \frac{\cos \alpha}{\cos \gamma} \right)^2 \pm \frac{1}{b^2} \left( y - z \frac{\cos \beta}{\cos \gamma} \right)^2 = 1,$$

где *плюс* для эллиптического и *минус* для гиперболического цилиндра;  $a, b$  — полуоси основания цилиндра и  $\alpha, \beta, \gamma$  — углы, составляемые осью цилиндра с осями координат.

## 15. ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ

### 15.1. Правила действий с векторами

Вектор  $\mathbf{a}$  определяется своей длиной или модулем  $a$  и направлением в пространстве:

$$\mathbf{a} = a\mathbf{a}^0,$$

где  $\mathbf{a}^0$  — орт (единичный вектор) того же направления.

Вектор  $\mathbf{a}$  вполне определяется своими проекциями  $(a_x, a_y, a_z)$  на координатные оси

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k},$$

где  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  — орты координатных осей  $x, y, z$ .

Длина вектора

$$a = |\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Косинус угла между векторами

$$\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{ab}.$$

Проекция вектор  $\mathbf{a}$  на ось  $\mathbf{n}$

$$a_n = a \cos(\mathbf{a}, \mathbf{n}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}^0.$$

Площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ :

$$S = |[\mathbf{a}\mathbf{b}]|.$$

Объем параллелограмма, построенного на векторах  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ :

$$V = |(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})|.$$

Двойное векторное произведение


$$[\mathbf{a}[\mathbf{b}\mathbf{c}]] = \mathbf{b}(\mathbf{a}\mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}\mathbf{b}).$$

Разложение вектора  $\mathbf{b}$  по направлению вектора  $\mathbf{a}$  и ему перпендикулярному:

$$\mathbf{b} = \mathbf{a}^0(\mathbf{b}\mathbf{a}^0) + [\mathbf{a}^0[\mathbf{b}\mathbf{a}^0]].$$

Основные действия над векторами и их свойства даны в табл. 15.1

Таблица 15.1

	Сумма двух векторов $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}, \mathbf{b} = \overrightarrow{BC}$	Произведение вектора $\mathbf{a}$ и скаляра $\lambda$	Скалярное произведение двух векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}$	Векторное произведение двух векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}$	Смешанное произведение трех векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$
Определение	$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$  <p>Рис. 15.1</p>	$\lambda \mathbf{a} = \begin{cases} (\lambda a) \mathbf{a}^0 & \text{при } \lambda > 0 \\ - \lambda a  \mathbf{a}^0 & \text{при } \lambda < 0 \end{cases}$	$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab \cos(\widehat{\mathbf{a} \mathbf{b}})$	$[\mathbf{a} \mathbf{b}] = \mathbf{c} = \begin{cases} c = ab  \sin(\widehat{\mathbf{a} \mathbf{b}})  \\ \mathbf{c} \perp \mathbf{a}, \mathbf{c} \perp \mathbf{b} \\ (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \text{ — правая тройка} \end{cases}$	$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = [\mathbf{a} \mathbf{b}] \cdot \mathbf{c}$
Выражение в координатах	$(a_x + b_x) \mathbf{i} + (a_y + b_y) \mathbf{j} + (a_z + b_z) \mathbf{k}$	$(\lambda a_x) \mathbf{i} + (\lambda a_y) \mathbf{j} + (\lambda a_z) \mathbf{k}$	$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$	$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$
Основные свойства	$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$	$\lambda \mathbf{a} = \mathbf{a} \lambda$ $\lambda(\mu \mathbf{a}) = (\lambda \mu) \mathbf{a}$ $\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda \mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}$ $(\lambda + \mu) \mathbf{a} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{a}$	$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$ $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$ $(\lambda \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$	$[\mathbf{a} \mathbf{b}] = -[\mathbf{b} \mathbf{a}]$ $[(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \mathbf{d}] = [\mathbf{a} \mathbf{d}] + [\mathbf{b} \mathbf{d}]$ $[(\lambda \mathbf{a}) \mathbf{b}] = \lambda[\mathbf{a} \mathbf{b}]$	$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}) =$ $= (\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = -(\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}) =$ $= -(\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}) = -(\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{a})$
Условия обращения в нуль	$\mathbf{a} + \mathbf{b} = 0$ при $\mathbf{a} = -\mathbf{b}$	$\lambda \mathbf{a} = 0$ при $\lambda = 0$ , или $\mathbf{a} = 0$	$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ при $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ (условие перпендикулярности)	$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = 0$ при $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ (условие коллинеарности)	$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0$ $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ — параллельны одной плоскости (условие компланарности)

Разложение вектора по трем ортогональным направлениям с осями  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ :

$$\mathbf{a} = (a\mathbf{e}_1) \mathbf{e}_1 + (a\mathbf{e}_2) \mathbf{e}_2 + (a\mathbf{e}_3) \mathbf{e}_3.$$

Если даны точки  $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$ , то

$$\overline{AB} = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k};$$

$$\overline{BA} = -\overline{AB}.$$

## 15.2. Векторная функция скалярного аргумента

Радиус-вектор точки  $M(x, y, z)$  есть

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

Уравнение  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  задает кривую  $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$

Вектор  $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$  направлен по касательной к кривой (рис. 15.2).

Вектор

$$d\mathbf{r} = dx \cdot \mathbf{i} + dy \cdot \mathbf{j} + dz \cdot \mathbf{k} = ds \cdot \boldsymbol{\tau}^0,$$

где  $\boldsymbol{\tau}^0$  — орт касательной, а  $ds$  — элемент длины дуги.

Правила дифференцирования векторов:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \frac{d\mathbf{a}}{dt} + \frac{d\mathbf{b}}{dt}; \quad \frac{d}{dt}(\lambda \mathbf{a}) = \frac{d\lambda}{dt} \mathbf{a} + \lambda \frac{d\mathbf{a}}{dt};$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \frac{d\mathbf{a}}{dt} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \frac{d\mathbf{b}}{dt}; \quad \frac{d}{dt}[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] = \left[ \frac{d\mathbf{a}}{dt} \times \mathbf{b} \right] + \left[ \mathbf{a} \times \frac{d\mathbf{b}}{dt} \right].$$

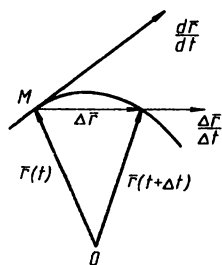


Рис. 15.2

## 15.3. Скалярное поле и градиент

Скалярное поле — часть пространства, в каждой точке  $M(x, y, z)$  которой задана скалярная функция

$$U(M) = U(x, y, z).$$

## Поверхность уровня

$$U(x, y, z) = \text{const.}$$

Производная от  $U(M)$  в точке  $M$  по направлению  $s$  (рис. 15.3):

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial s} &= \lim_{M_1 \rightarrow M} \frac{U(M_1) - U(M)}{M_1 M} = \\ &= \text{grad } U \cdot s^0 = \frac{\partial U}{\partial n} \cos(\mathbf{n}, \mathbf{s}); \end{aligned}$$

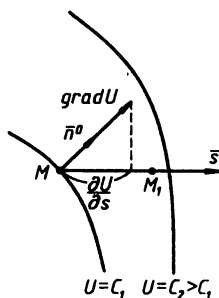


Рис. 15.3

$\mathbf{n}$  — нормаль к поверхности уровня в точке  $M$ , ориентированная в сторону возрастания функции  $U$ .

Градиент поля — вектор, имеющий направление нормали  $\mathbf{n}$  и длину, равную  $\frac{\partial U}{\partial n}$ :

$$\text{grad } U = \frac{\partial U}{\partial n} \mathbf{n}^0.$$

Формулы градиента см. табл. 15.2.

Правила вычисления градиента:

$$\text{grad } C = 0, \quad \text{grad}(U_1 + U_2) = \text{grad } U_1 + \text{grad } U_2;$$

$$\text{grad } CU = C \text{ grad } U, \quad \text{где } C = \text{const};$$

$$\text{grad}(U_1 U_2) = U_1 \text{ grad } U_2 + U_2 \text{ grad } U_1;$$

$$\text{grad } f(U) = f'(U) \text{ grad } U.$$

## 15.4. Векторное поле, дивергенция и ротор

Векторное поле — часть пространства, в каждой точке  $M(x, y, z)$  которой задана векторная функция

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}(M) = a_x(x, y, z)\mathbf{i} + a_y(x, y, z)\mathbf{j} + a_z(x, y, z)\mathbf{k}.$$

Плоское поле

$$\mathbf{a} = a_x(x, y)\mathbf{i} + a_y(x, y)\mathbf{j}.$$

Векторные линии (линии потока для поля скоростей, силовые линии для поля сил) — кривые, в каждой точке которых вектор поля направлен по касательной.

Дифференциальные уравнения векторных линий:

$$\frac{dx}{a_x} = \frac{dy}{a_y} = \frac{dz}{a_z};$$

для плоского поля

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_y}{a_x}.$$

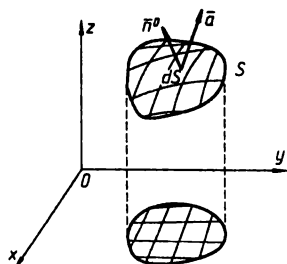


Рис. 15.4

Поток вектора через поверхность  $S$  (рис. 15.4):

$$\Phi = \iint_S \mathbf{a} \mathbf{n}^0 dS = \iint_{S_{yz}} a_x dy dz + \iint_{S_{zx}} a_y dz dx + \iint_{S_{xy}} a_z dx dy,$$

где  $\mathbf{n}^0$  — орт нормали к поверхности  $S$ , а  $S_{yz}$ ,  $S_{zx}$ ,  $S_{xy}$  — проекции поверхности  $S$  на соответствующие координатные плоскости.

Если поверхность  $S$  пересекается каждой прямой, параллельной оси  $Oz$ , не более чем в одной точке, так что ее уравнение можно записать в форме  $z = z(x, y)$ , то

$$\int_{S_{xy}} a_z dx dy = \iint_{S_{xy}} a_z [x, y, z(x, y)] dx dy.$$

В более общем случае поверхность  $S$  следует разложить на части указанного вида и воспользоваться свойством аддитивности интеграла.

Дивергенция поля — скаляр, равный объемной плотности потока в рассматриваемой точке поля:

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_S \mathbf{a} \mathbf{n}^0 dS,$$

где  $S$  — замкнутая поверхность, ограничивающая объем  $V$ ;  $\mathbf{n}^0$  — орт ее внешней нормали; объем  $V \rightarrow 0$  стягивается к рассматриваемой точке.

Формула Остроградского:

$$\oint_S \mathbf{a} \mathbf{n}^0 dS = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{a} dV.$$

Формулы дивергенции см. в табл. 15.2.

Правила вычисления дивергенции:

$$\operatorname{div} \mathbf{C} = 0, \quad (\mathbf{C} = \overline{\text{const}}); \quad \operatorname{div} (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) = \operatorname{div} \mathbf{a}_1 + \operatorname{div} \mathbf{a}_2;$$

$$\operatorname{div}(U\mathbf{a}) = U \operatorname{div} \mathbf{a} + \operatorname{grad} U \mathbf{a}.$$

Если  $\operatorname{div} \mathbf{a} = 0$ , то поле называется *соленоидальным* (трубчатым). В соленоидальном поле поток вектора через любое сечение векторной трубки имеет одно и то же значение.

*Криволинейный интеграл в векторном поле*, взятый по пути  $L$ :

$$\int_L \mathbf{a} d\mathbf{r} = \int_L a_x dx + a_y dy + a_z dz = \int_L a_s ds,$$

где  $a_s$  — проекция вектора  $\mathbf{a}$  на касательную к кривой  $L$ .

В силовом поле  $\int_L \mathbf{F} d\mathbf{r}$  — работа сил поля  $\mathbf{F}$  при перемещении точки по пути  $L$ .

*Вычисление.* Если путь интегрирования задан уравнениями

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \quad (t_0 \leq t \leq T),$$

то

$$\int_L \mathbf{a} d\mathbf{r} = \int_{t_0}^T \left\{ a_x[x(t), y(t), z(t)] \frac{dx}{dt} + a_y \frac{dy}{dt} + a_z \frac{dz}{dt} \right\} dt.$$

*Циркуляция*  $\oint \mathbf{a} d\mathbf{r}$  есть интеграл по замкнутому контуру.

*Ротор* поля  $\operatorname{rot} \mathbf{a}$  — вектор, проекция которого на любое направление  $\mathbf{n}$  равна поверхностной плотности циркуляции по контуру площадки, перпендикулярной этому направлению (рис. 15.5):

$$(\operatorname{rot} \mathbf{a}) \mathbf{n}^0 = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\oint_L \mathbf{a} d\mathbf{r}}{S}.$$

Формула Стокса:

$$\oint_L \mathbf{a} d\mathbf{r} = \iint_S (\operatorname{rot} \mathbf{a}) \mathbf{n}^0 dS,$$

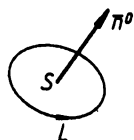


Рис. 15.5

где  $S$  — поверхность, натянутая на замкнутый контур  $L$ ;  $\mathbf{n}^0$  — орт нормали к поверхности, направленный в ту сторону поверхности, с которой обход контура  $L$  виден против часовой стрелки.

Формулы ротора см. в табл. 15.2.

Правила вычисления ротора:

$$\operatorname{rot} \mathbf{C} = 0; \quad \operatorname{rot}(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) = \operatorname{rot} \mathbf{a}_1 + \operatorname{rot} \mathbf{a}_2;$$

$$\operatorname{rot}(U\mathbf{a}) = U\operatorname{rot} \mathbf{a} + [\operatorname{grad} U, \mathbf{a}].$$

*Оператор Лапласа*

$$\Delta U = \operatorname{div} \operatorname{grad} U = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_S \frac{\partial U}{\partial n} dS,$$

где  $S$  — замкнутая поверхность, ограничивающая объем  $V$ ;  $\mathbf{n}$  — внешняя нормаль к поверхности  $S$ .

Формулы оператора Лапласа см. табл. 15.2.

Формулы Грина:

$$\oint_S U_1 \frac{\partial U_2}{\partial n} dS = \iiint_V (U_1 \Delta U_2 + \operatorname{grad} U_1 \cdot \operatorname{grad} U_2) dV;$$

$$\oint_S \left( U_1 \frac{\partial U_2}{\partial n} - U_2 \frac{\partial U_1}{\partial n} \right) dS = \iiint_V (U_1 \Delta U_2 - U_2 \Delta U_1) dV.$$

В частности,

$$\oint_S \frac{\partial U}{\partial n} dS = \iiint_V \Delta U dV.$$

Для любого поля имеют место формулы:

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{a} = 0; \quad \operatorname{rot} \operatorname{grad} U = 0;$$

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{a} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{a} = \Delta \mathbf{a} = \Delta a_x \mathbf{i} + \Delta a_y \mathbf{j} + \Delta a_z \mathbf{k}.$$

*Потенциальное поле* — векторное поле, в котором криволинейный интеграл зависит не от формы пути, а только от начальной и конечной точек пути.

Условие потенциальности поля:  $\operatorname{rot} \mathbf{a} = 0$ .

*Потенциал поля:*

$$U(M) = \int_{M_0}^M \mathbf{a} d\mathbf{r} + C; \quad -\operatorname{grad} U = \mathbf{a}.$$

В декартовых координатах

$$-U(x, y, z) = \int_{x_0}^x a_x(x, y_0, z_0) dx + \int_{y_0}^y a_y(x, y, z_0) dy + \int_{z_0}^z a_z(x, y, z) dz.$$

Таблица 15.2

Операция	Символическая запись*	Декартовы координаты (x, y, z)	Цилиндрические координаты (r, α, z)**	Сферические координаты (R, ϑ, α)***
grad U	$\nabla U$	$\frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{k}$	$\frac{\partial U}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \alpha} \mathbf{e}_\alpha + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{k}$	$\frac{\partial U}{\partial R} \mathbf{e}_R + \frac{1}{R} \frac{\partial U}{\partial \vartheta} \mathbf{e}_\vartheta + \frac{1}{R \sin \vartheta} \frac{\partial U}{\partial \alpha} \mathbf{e}_\alpha$
div a	$\nabla \mathbf{a}$	$\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r} \frac{\partial(r a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial a_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$	$\frac{1}{R^2} \frac{\partial(R^2 a_R)}{\partial R} + \frac{1}{R \sin \vartheta} \frac{\partial(\sin \vartheta \cdot a_\vartheta)}{\partial \vartheta} + \frac{1}{R \sin \vartheta} \frac{\partial a_\alpha}{\partial \alpha}$
rot a	$[\nabla \mathbf{a}]$	$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} \frac{1}{r} \mathbf{e}_r & \mathbf{e}_\alpha & \frac{1}{r} \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \alpha} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_r & r a_\alpha & a_z \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} \frac{1}{R^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial R} & \frac{1}{R^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} & \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \alpha} \\ a_R & R a_\vartheta & R \sin \vartheta a_\alpha \end{vmatrix}$
div grad U	$\Delta U = \nabla^2 U$	$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$	$\frac{1}{R} \frac{\partial^2 (RU)}{\partial R^2} + \frac{1}{R^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial U}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{R^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2}$

\* Символ  $\nabla$  (набла) означает дифференциальный оператор; в декартовых координатах  $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}$ .

\*\* Применяются также обозначения  $(\rho, \varphi, z)$ .

\*\*\* Применяются также обозначения  $(r, \vartheta, \varphi)$ .

## 16. ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

### 16.1. Обработка результатов непосредственных измерений

**1. Случайные ошибки измерения, распределение случайных ошибок.** Ошибка измерения — разность  $x - a$  между результатом измерения  $x$  и истинным значением  $a$  измеряемой величины. Ошибки измерения делятся на грубые, систематические и случайные.

*Грубые ошибки* (промахи) получаются вследствие нарушения установленных условий измерения. Если эти нарушения обнаружены в процессе измерения, то соответствующие результаты измерения должны быть отброшены.

*Систематические ошибки* вызываются известными причинами, действующими по определенным законам и, как правило, в одном направлении. Систематические ошибки либо устраняются путем выверки и настройки прибора, либо учитываются как поправки к результатам измерений.

*Случайные ошибки* являются неизбежными, неустранимыми. Случайные ошибки характеризуются распределением вероятностей.

Обозначение  $P\{\varepsilon_1 < x - a < \varepsilon_2\}$  — вероятность того, что случайная ошибка  $x - a$  заключена между числами  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$ .

Наличие определенной вероятности  $P\{\varepsilon_1 < x - a < \varepsilon_2\}$  проявляется практически следующим образом. При достаточно большом числе  $n$  независимых измерений величины  $a$  одним и тем же прибором количество  $m$  случайных ошибок, заключенных между  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$ , удовлетворяет приближенному равенству

$$\frac{m}{n} \approx P\{\varepsilon_1 < x - a < \varepsilon_2\}.$$

Для большинства видов измерений вероятности вычисляются по формуле

$$P\{\varepsilon_1 < x - a < \varepsilon_2\} = \frac{1}{2} \Phi\left(\frac{\varepsilon_2}{\sigma}\right) - \frac{1}{2} \Phi\left(\frac{\varepsilon_1}{\sigma}\right),$$

где  $\Phi(t)$  — интеграл вероятностей;  $\sigma$  — средняя квадратическая ошибка измерения (положительная постоянная, характеризующая точность измерений).

Интеграл вероятностей (см. табл. 16.1):

$$\Phi(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{t^2}{2}} dt; \quad \Phi(-t) = -\Phi(t),$$

$\Phi(t)$  — вероятность того, что абсолютная величина случайной ошибки  $|x - a|$  меньше  $t\sigma$ ;  $1 - \Phi(t)$  — вероятность того, что  $|x - a| > t\sigma$  ( $t > 0$ );

Таблица 16.1

$t$	$\Phi(t)$	$t$	$\Phi(t)$	$\Phi(t)$	$t$	$1 - \Phi(t)$
0,0	0,000	1,0	0,683	0,900	1,645	0,100
0,1	0,080	1,1	0,729	0,950	1,960	0,050
0,2	0,159	1,2	0,770	0,980	2,326	0,020
0,3	0,236	1,3	0,806	0,990	2,576	0,010
0,4	0,311	1,4	0,838	0,995	2,807	0,005
0,5	0,383	1,5	0,866	0,998	3,09	0,002
0,6	0,452	1,6	0,890	0,999	3,29	0,001
0,7	0,516	1,7	0,911	0,9995	3,48	0,0005
0,8	0,576	1,8	0,928	0,9998	3,72	0,0002
0,9	0,632	1,9	0,943	0,9999	3,89	0,0001

### Пример.

Вероятность того, что  $|x - a| > 3,29\sigma$  составляет всего 0,001. Практически это означает, что случайные ошибки, превосходящие по абсолютной величине  $3,29\sigma$ , встречаются приблизительно раз на тысячу измерений. При малом числе измерений (порядка 10–20) возможностью появления таких редких явлений можно пренебречь, т. е. можно считать, что практически не встретятся случайные ошибки, превосходящие по абсолютной величине  $3,29\sigma$ .

Обычно в качестве предельной абсолютной ошибки при измерениях принимают величину  $3\sigma$ . При этом пренебрегают вероятностью

$$P\{|x - a| > 3\sigma\} < 0,003$$

(«правило трех сигм»).

**2. Среднее арифметическое значение.** Среднее арифметическое значение из результатов измерений  $x_1, x_2, \dots, x_n$  есть

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

Величина  $\bar{x}$  имеет среднюю квадратическую ошибку

$$\sigma(\bar{x}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

при условии, что измерения произведены независимо друг от друга с одной и той же средней квадратической ошибкой  $\sigma$  и что грубые и систематические ошибки исключены.

Уменьшение ошибки среднего арифметического значения при увеличении количества измерений вызывается частичной компенсацией положительных и отрицательных случайных ошибок.

*Вычисление среднего арифметического.* При вычислении среднего арифметического значения  $\bar{x}$  можно вести отсчет значений  $x_k$  от любого начала отсчета  $x_0$  и в любом масштабе: если

$$x_k = x_0 + h\xi_k \quad (k=1, 2, \dots, n),$$

то

$$\bar{x} = x_0 + h\bar{\xi},$$

где

$$\bar{\xi} = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{n}.$$

**Пример расчета.**

$k$	$x$	$\xi$
1	35,6	-4
2	35,9	-1
3	36,1	+1
4	36,2	+2
5	36,4	+4
Сумма		2

$$x_0 = 36,0; \quad h = 0,1;$$

$$\xi = \frac{x - 36,0}{0,1}.$$

$$\bar{\xi} = \frac{2}{5} = 0,4.$$

$$\bar{x} = 36,0 + 0,1 \cdot 0,4 = 36,04.$$

В значении  $x$  рекомендуется сохранять на один знак больше, чем в значениях  $x_k$ .

**3. Оценка истинного значения измеряемой величины при равнооточных измерениях.** Наиболее вероятным значением измеряемой величины  $a$  (при указанных выше условиях) является среднее арифметическое  $\bar{x}$  из результатов измерений.

*Доверительная оценка приближенного равенства  $a \approx \bar{x}$*  состоит в указании такого интервала  $(\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon)$ , в котором с за-

данной вероятностью  $P$  должно находиться искомое значение  $a$  измеряемой величины.

Вероятность  $P$  называется *надежностью* доверительной оценки и задается достаточно близкой к 1, например 0,99 или 0,999, в зависимости от важности оценки. Это значит, что пренебрегают возможностью появления ошибки с малой вероятностью  $1 - P$ , равной 0,01 или 0,001.

Число  $\varepsilon$  называется *точностью* приближенного равенства  $a \approx \bar{x}$ . Оно определяется формулой

$$\varepsilon = t(P; n) \frac{s_n}{\sqrt{n}},$$

где  $s_n = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2}{n-1}}$ , а коэффициент  $t(P; n)$  находится по

табл. 16.2 *распределения Стьюдента*.

Таблица 16.2

$n$	$P = 0,99$	$n$	$P = 0,99$	$P = 0,999$	$n$	$P = 0,99$	$P = 0,999$
4	5,84	10	3,25	4,78	30	2,76	3,66
5	4,60	12	3,11	4,44	40	2,71	3,56
6	4,03	14	3,01	4,22	50	2,68	3,50
7	3,71	16	2,95	4,07	60	2,66	3,46
8	3,50	18	2,90	3,97	70	2,65	3,44
9	3,36	20	2,86	3,88	80	2,64	3,42

$$t(0,99; n) \rightarrow 2,58; \quad t(0,999; n) \rightarrow 3,29 \text{ при } n \rightarrow \infty$$

*Вычисление величины  $s_n$ :*

если

$$x_k = x_0 + h\xi_k \quad (\text{см. левый столбец}),$$

то

$$s_n \sqrt{\frac{n-1}{n}} = h \sqrt{\overline{\xi^2} - (\bar{\xi})^2},$$

где

$$\overline{\xi^2} = \frac{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2}{n}.$$

Величину  $s_n$  вычисляют не более чем с двумя-тремя знаками.

### Пример расчета.

$k$	$x$	$\xi$	$\xi^2$
1	35,6	-4	16
2	35,9	-1	1
3	36,1	+1	1
4	36,2	+2	4
5	36,4	+4	16
—	Суммы	2	38

Здесь  $\bar{\xi}=0,4$ ;  $\overline{\xi^2}=\frac{38}{5}=7,6$ ;  $h=0,1$ .

Поэтому

$$s_n \sqrt{\frac{n-1}{n}} = 0,1 \sqrt{7,6 - (0,4)^2} = 0,273$$

и, значит,  $\frac{s_n}{\sqrt{n}} = \frac{0,273}{\sqrt{5-1}} = 0,136$ .

Доверительная оценка искомого значения  $a$  с надежностью  $P = 0,99$  дается неравенством  $36,04 - 4,60 \cdot 0,136 < a < 36,04 + 4,60 \cdot 0,136$ , т. е.  $35,4 < a < 36,7$ .

Для более точной оценки надо увеличить число измерений или повысить точность отдельных измерений.

**4. Оценка точности прибора (точности измерений).** Точность прибора характеризуется средней квадратической ошибкой  $\sigma$ . При измерениях одной и той же величины имеет место приближенная формула

$$\sigma \approx s_n = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2}{n-1}}.$$

Величина  $s_n$  называется эмпирическим значением средней квадратической ошибки.

Доверительная оценка средней квадратической ошибки с заданной надежностью  $P$  дается неравенством

$$s_n[1 - q(P; n)] \delta < \sigma < s_n[1 + q(P; n)],$$

где

$$\delta = \begin{cases} 0 & \text{при } q(P; n) \geq 1, \\ 1 & \text{при } q(P; n) < 1, \end{cases}$$

а коэффициент  $q(P; n)$  находится по табл. 16.3.

При  $n > 80$  можно считать

$$q(0,99; n) \approx \frac{b}{\sqrt{2(n-1)}}; \quad q(0,999; n) \approx \frac{c}{\sqrt{2(n-1)}},$$

где  $b$  и  $c$  даны в табл. 16.4

Таблица 16.3

$n$	$P = 0,99$	$n$	$P = 0,99$	$P = 0,999$	$n$	$P = 0,99$	$P = 0,999$
4	4,11	10	1,08	1,80	30	0,43	0,63
5	2,67	12	0,90	1,45	40	0,35	0,50
6	2,01	14	0,78	1,23	50	0,30	0,43
7	1,62	16	0,70	1,07	60	0,27	0,38
8	1,38	18	0,63	0,96	70	0,24	0,34
9	1,20	20	0,58	0,88	80	0,23	0,31

**Пример оценки.**

Таблица 16.4

Пример оценки  $\sigma$  по данным предыдущего примера расчета:

$$s_n = 0,273 \cdot \sqrt{\frac{5}{4}} = 0,305; \quad \sigma \approx 0,305.$$

С надежностью  $P = 0,9$  доверительная оценка  $\sigma$  дается неравенством

$$0 < \sigma < 0,305(1 + 2,67),$$

т. е.

$$0 < \sigma < 1,12.$$

$n$	$b$	$c$
80–100	2,8	3,9
100–150	2,8	3,8
150–250	2,7	3,7
250–350	2,7	3,6
350–500	2,7	3,5

Более точная оценка требует значительно большего числа данных. Для этой цели можно также пользоваться результатами измерений разных величин. При измерении одним и тем же прибором разных величин имеет место приближенная формула

$$\sigma \approx s = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_{n_1}^2 + \dots + (n_m - 1)s_{n_m}^2}{(n_1 - 1) + \dots + (n_m - 1)}},$$

где  $n_1, \dots, n_m$  — количества измерений первой, ...,  $m$ -ой величины, а  $s_{n_1}, \dots, s_{n_m}$  — соответствующие эмпирические значения средней квадратической ошибки.

Средняя квадратическая ошибка приближенного равенства  $\sigma \approx s$  равна

$$\frac{s}{\sqrt{2(n-m)}},$$

где

$$n = n_1 + n_2 + \dots + n_m.$$

При больших значениях  $n - m$  (больших 40) можно пользоваться доверительной оценкой

$$s \left( 1 - \frac{3}{\sqrt{2(n-m)}} \right) < \sigma < s \left( 1 + \frac{3}{\sqrt{2(n-m)}} \right)$$

с надежностью, превышающей 0,99.

С надежностью 0,999 можно пользоваться доверительной оценкой

$$s \left( 1 - \frac{4}{\sqrt{2(n-m)}} \right) < \sigma < s \left( 1 + \frac{4}{\sqrt{2(n-m)}} \right)$$

при  $n - m > 80$ .

**5. Оценка выскакивающих значений.** Выскакивающим значением называется результат измерения  $x_{n+1}$ , резко отключающийся от остальных результатов  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . При получении выскакивающего значения надо прежде всего проверить, не нарушаются ли установленные условия измерения. В случае обнаружения такого нарушения выскакивающее значение считается промахом и отбрасывается. В случае отсутствия явных данных об указанном нарушении вопрос о браковке или оставлении выскакивающего значения решается путем оценки относительного отклонения его от среднего значения

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

*Оценка при неизвестной точности прибора* (при неизвестной  $\sigma$ ).

Выскакивающее значение  $x_{n+1}$  можно считать промахом с надежностью вывода  $P$ , если относительное отклонение

$$\frac{|x_{n+1} - \bar{x}|}{\sqrt{\frac{n+1}{n}} s_n}$$

превосходит соответствующее число  $t(P; n)$  из табл. 15.2 распределения Стьюдента.

*Оценка при известной точности прибора* (при известной  $\sigma$ ).

Выскакивающее значение  $x_{n+1}$  можно считать промахом с надежностью вывода  $\Phi(t)$ , если относительное отклонение

$$\frac{|x_{n+1} - \bar{x}|}{\sqrt{\frac{n+1}{n}} \sigma}$$

превосходит соответствующее число  $t$  из таблицы интеграла вероятностей  $\Phi(t)$  (табл. 16.1).

Примечание. Указанный метод браковки выскакивающих значений по их величине является недостаточно эффективным: при малом числе измерений он не дает гарантии в том, что среди оставленных значений полностью отсутствуют промахи.

**6. Неравноточные измерения.** При независимых измерениях неодинаковой точности наиболее вероятным значением измеряемой величины  $a$  является *среднее взвешенное*

$$\bar{x} = \frac{x_1 w_1 + x_2 w_2 + \dots + x_n w_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_n},$$

где положительные числа  $w_1, w_2, \dots, w_n$ , обратно пропорциональны квадратам соответствующих средних квадратических ошибок:

$$w_1 : w_2 : \dots : w_n = \frac{1}{\sigma_1^2} : \frac{1}{\sigma_2^2} : \dots : \frac{1}{\sigma_n^2}.$$

Число  $w_k$  называется *весом* измерения  $x_k$ . Весом величины  $\bar{x}$  является сумма весов отдельных измерений:

$$W = w_1 + w_2 + \dots + w_n.$$

Средняя квадратическая ошибка величины  $\bar{x}$  равна:

$$\sigma(\bar{x}) = \sigma_k \sqrt{\frac{w_k}{W}} \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

*Доверительная оценка* приближенного равенства  $a \approx \bar{x}$  с заданной надежностью  $P$  дается неравенством

$$x - t(P; n) s_w < a < x + t(P; n) s_w,$$

где  $t(P; n)$  находится из табл. 16.2 распределения Стьюдента, а

$$s_w = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2 w_k}{(n-1) \sum_{k=1}^n w_k}}.$$

## 16.2. Правила приближенных вычислений

**1. Погрешности приближенных чисел и их округление.** При измерениях находят лишь приближенные значения измеряемых величин. В расчетах с такими приближенными значениями (*приближенными числами*) следует учитывать их возможные погрешности.

*Абсолютной погрешностью* приближенного числа  $a$  называется наименьшее число  $\Delta_a$ , относительно которого с достаточной надежностью известно, что

$$|a - a_0| < \Delta_a,$$

где  $a_0$  — точное значение соответствующей величины.

*Относительная погрешность*

$$\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|} \quad (\text{выражается в процентах}).$$

**Пример.**

$$a = 45,2; \quad \Delta_a = 0,2;$$

$$\delta_a = \frac{0,2}{45,2} = \frac{2}{452} < 0,005 = 0,5\%.$$

*Верными знаками* приближенного числа называются все значащие цифры тех разрядов, которые выше старшего разряда его абсолютной погрешности. При этом значащими цифрами считаются все цифры, кроме тех нулей, которые стоят с левой стороны. Например, в числах  $a = 45,2$  при  $\Delta_a = 0,2$  и  $b = 0,0045156$  при  $\Delta_b = 0,0000273$  верными знаками являются 45.

Приближенные числа следует *округлять*, сохраняя только верные знаки и не более одного сомнительного. Если при этом первая отбрасываемая цифра равна 5 или больше, то последнюю оставленную цифру следует увеличить на 1 (правило дополнения).

В математических таблицах сохраняют только верные знаки, причем абсолютная погрешность не превосходит *половины* единицы младшего разряда табличных данных. В технических таблицах обычно сохраняют один сомнительный знак; при этом всегда следует указывать погрешность, округленную до одного знака (с учетом погрешности округления числа). При массовых расчетах рекомендуется оставлять в промежуточных результатах два сомнительных знака для уменьшения погрешности при вычислениях; добавочный сомнительный знак учитывается при округлении окончательного результата.

**2. Погрешности арифметических действий.** При сложении и вычитании приближенных чисел их следует округлять до одного и того же разряда.

Абсолютная погрешность алгебраической суммы

$$\Delta_{a_1+a_2+\dots+a_n} = \Delta_{a_1} + \Delta_{a_2} + \dots + \Delta_{a_n}.$$

При большом количестве  $N$  слагаемых с одной и той же погрешностью  $\Delta_a$  абсолютная погрешность алгебраической суммы составляет  $\sqrt{3N} \cdot \Delta_a$ .

**Пример.**

Если число слагаемых меньше 30 и во всех слагаемых сотые верны, то сумме будут верны десятичные.

**Примечание.** При вычитании близких чисел происходит потеря относительной точности. В этих случаях следует преобразовать формулу или схему расчета так, чтобы избежать вычитания близких чисел.

При умножении и делении приближенных чисел их следует округлять до одинакового количества значащих цифр. Результат следует округлять до такого же количества значащих цифр (последний знак результата может быть сомнителен).

Относительная погрешность произведения или частного двух чисел  $a$  и  $b$  равна  $\delta_a + \delta_b$ .

**Пример расчета** абсолютной погрешности произведения:

$$a = 45,2; \quad \Delta_a = 0,2; \quad \delta_a = 0,5\%;$$

$$b = 3,38; \quad \Delta_b = 0,03; \quad \delta_b = 0,9\%;$$

$$ab = 153; \quad \delta_{ab} = 0,5\% + 0,9\% = 1,4\%; \quad \Delta_{ab} = |ab| \delta_{ab} = 153 \cdot 0,014 < 3.$$

**Примечание.** Если первая значащая цифра числа  $a$  или  $b$  равна 1, то в нем следует сохранять на один знак больше, чем указано выше.

При большом количестве  $N$  сомножителей с одинаковым количеством верных знаков, т. е. примерно с одной и той же относительной погрешностью  $\delta$ , относительная погрешность произведения составляет  $\sqrt{3N}\delta$ .

Относительная погрешность степени  $a^k$  равна  $k\delta_a$ . Относительная погрешность корня  $\sqrt[k]{a}$  равна  $\frac{1}{k}\delta_a$ . При извлечении корня количество верных знаков сохраняется.

При вычислениях с помощью логарифмов следует брать таблицу логарифмов с числом десятичных знаков на единицу большим, чем требуемое число верных знаков результата.

**3. Погрешности функции.** Если значение аргумента  $x$  является приближенным числом, но его погрешность  $\Delta_x$  достаточно мала, то погрешность функции  $f(x)$  можно оценить по формуле

$$\Delta_f = \left| \frac{df}{dx} \right| \Delta_x.$$

При вычислении приближенных значений функции с помощью степенного ряда целесообразно брать столько первых членов ряда, чтобы его остаток был того же порядка малости, что и  $\Delta_f$ .

Погрешность таблично заданной функции  $f(x)$  дается формулой

$$\Delta_f = \frac{\Delta f_0}{h} \Delta_x,$$

где  $h = x_1 - x_0$ ;  $\Delta f_0 = f(x_1) - f(x_0)$ ;  $x_0 < x < x_1$ ;  $\Delta_x < h$ , и предполагается, что таблица функции  $f(x)$  с шагом  $h$  допускает линейную интерполяцию.

Погрешность функции нескольких переменных  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  дается формулой

$$\Delta_f = \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| \Delta_{x_1} + \left| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right| \Delta_{x_2} + \dots + \left| \frac{\partial f}{\partial x_n} \right| \Delta_{x_n}.$$

Если значения аргументов измерены непосредственно со средними квадратическими ошибками  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ , то средняя квадратическая ошибка функции равна

$$\sigma(f) = \sqrt{\left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^2 \sigma_1^2 + \dots + \left( \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)^2 \sigma_n^2},$$

причем все частные производные берутся для средних значений аргументов, т. е. в точке  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ .

В частности, для функции вида

$$z = C x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$$

средняя квадратическая ошибка

$$\sigma(z) = \bar{z} \sqrt{k_1^2 \left( \frac{\sigma_1}{\bar{x}_1} \right)^2 + \dots + k_n^2 \left( \frac{\sigma_n}{\bar{x}_n} \right)^2}$$

и относительная ошибка

$$\sigma_z = \sqrt{k_1^2 \sigma_1^2 + k_2^2 \sigma_2^2 + \dots + k_n^2 \sigma_n^2},$$

где  $\delta_k = 3 \frac{\sigma_k}{\bar{x}_k}$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ).

### 16.3. Подбор эмпирических формул

Подбор эмпирических формул служит для приближенного выражения функциональной зависимости между величинами по данным измерений их соответственных значений. Следует различать две задачи: нахождение параметров формул заданного вида и подбор формул возможно более простого вида.

#### 1. Нахождение параметров линейных зависимостей методом наименьших квадратов.

*Для линейной функции одной переменной*

$$y = ax + b$$

параметры  $a$  и  $b$  находятся по формулам

$$a = \frac{\sum xy - \frac{1}{N} \sum x \cdot \sum y}{\sum x^2 - \frac{1}{N} (\sum x)^2};$$

$$b = \frac{1}{N} \left( \sum y - a \sum x \right) = \bar{y} - a \bar{x},$$

где  $N$  — общее количество соответственных данных  $(x_k, y_k)$ ; знак  $\sum$  означает суммирование по всем данным, например:

$$\sum xy = \sum_{k=1}^N x_k y_k.$$

Параметры  $a$  и  $b$ , найденные по указанным формулам, обладают тем свойством, что для них сумма квадратов разностей

$$\sum_{k=1}^N [y_k - (ax_k + b)]^2$$

принимает наименьшее значение. В случае равноточных независимых измерений значений  $x_k, y_k$  указанные формулы дают наиболее вероятные значения параметров  $a$  и  $b$ .

Формула для параметра  $a$  не меняется при линейных преобразованиях величин  $x$  и  $y$  вида:

$$x = x_0 + h_1 \xi \quad (h_1 > 0);$$

$$y = y_0 + h_2 \eta \quad (h_2 > 0);$$

это обстоятельство служит для упрощения вычислений.

Если значения аргумента  $x$  отличаются на постоянное число  $h$  и количество данных нечетно, т. е.

$$x_k = x_0 + hk \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm M),$$

то линейная функция находится по формуле

$$y - \bar{y} = A \frac{x - x_0}{h},$$

где

$$\bar{y} = \frac{1}{2M+1} \sum_{k=-M}^M y_k;$$

$$A = \frac{3}{M(M+1)(2M+1)} \sum_{k=-M}^M k y_k.$$

*Для линейной функции двух переменных*

$$z = ax + by + c$$

параметры  $a, b, c$  находятся из системы линейных уравнений

$$\begin{cases} a \sum x^2 + b \sum xy + c \sum x = \sum xz \\ a \sum xy + b \sum y^2 + c \sum y = \sum yz \\ a \sum x + b \sum y + cN = \sum z, \end{cases}$$

где  $N$  — общее количество соответственных данных  $(x_k, y_k, z_k)$ ; знак  $\sum$  означает суммирование по всем данным.

Параметры  $a, b, c$ , найденные из указанной системы, обладают тем свойством, что для них сумма квадратов разностей

$$\sum_{k=1}^N [z_k - (ax_k + by_k + c)]^2$$

принимает наименьшее значение. В случае равноточных независимых измерений значений  $x_k, y_k, z_k$  решение указанной системы дает наиболее вероятные значения параметров  $a, b, c$ .



принимает наименьшее значение. В случае равнооточных независимых измерений значений  $x_k, y_k$  решение указанной системы дает наиболее вероятные значения параметров  $a_0, a_1, \dots, a_n$ .

Нахождение параметров многочлена значительно упрощается, если значения  $y_k$  измерены для нечетного количества  $N = 2M + 1$  равноотстоящих значений аргумента

$$x_k = x_0 + hk \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm M).$$

В этом случае многочлен находится по формуле

$$y = A_0 \varphi_0(\xi) + A_1 \varphi_1(\xi) + \dots + A_n \varphi_n(\xi),$$

где

$$\xi = \frac{x - x_0}{h};$$

$$A_v = \frac{1}{B_v} \sum_{k=-M}^M y_k \varphi_v(k);$$

$$B_v = \sum_{k=-M}^M \varphi_v^2(k) \quad (v = 0, 1, 2, \dots, n);$$

$\varphi_v(\xi)$  — ортогональные многочлены Чебышева.

Формулы для первых пяти многочленов Чебышева:

$$\varphi_0(\xi) = 1; \quad B_0 = N = 2M + 1;$$

$$\varphi_1(\xi) = \xi; \quad B_1 = B_0 \frac{N^2 - 1}{12};$$

$$\varphi_2(\xi) = \xi^2 - c_2; \quad c_2 = \frac{B_1}{B_0} = \frac{M^2 + M}{3};$$

$$B_2 = B_1 \frac{N^2 - 4}{15}; \quad \varphi_3(\xi) = \xi^3 - c_3 \xi;$$

$$c_3 = \frac{B_2}{B_1} + c_2 = \frac{3M^2 + 3M - 1}{5};$$

$$B_3 = B_2 \cdot \frac{9}{4} \cdot \frac{N^2 - 9}{35}; \quad \varphi_4(\xi) = \xi^4 - c_4(\xi^2 - c_2) - c_2 c_3;$$

$$c_4 = \frac{B_3}{B_2} + c_3 = \frac{6M^2 + 6M - 5}{7}; \quad B_4 = B_3 \cdot 4 \frac{N^2 - 16}{63}.$$

Таблица 16.5

Коэффициенты первых пяти многочленов Чебышева

$N=B_0$	$B_1$	$3c_2$	$15\frac{B_2}{B_1}$	$5c_3$	$35\frac{B_3}{B_2}$	$7c_4$	$63\frac{B_4}{B_3}$
5	10	6	21	17	36	31	36
7	28	12	45	35	90	67	132
9	60	20	77	59	162	115	260
11	110	30	117	89	252	175	420
13	182	42	165	125	360	247	612
15	280	56	221	167	486	331	836
17	408	72	285	215	630	427	1092
19	570	90	357	269	792	535	1380
21	770	110	437	329	972	655	1700
23	1012	132	525	395	1170	787	2052
5	1300	156	621	467	1386	931	2436

**Примеры.**

Многочлен второй степени для пяти точек

$$y = A_0 + A_1\xi + A_2(\xi^2 - 2),$$

где

$$A_0 = \frac{1}{5} \sum_{k=-2}^2 y_k; \quad A_1 = \frac{1}{10} \sum_{k=-2}^2 k y_k;$$

$$A_2 = \frac{1}{14} (2y_{-2} - y_{-1} - 2y_0 - y_1 + 2y_2).$$

Многочлен третьей степени для семи точек

$$y = A_0 + A_1\xi + A_2(\xi^2 - 4) + A_3(\xi^3 - 7\xi),$$

где

$$A_0 = \frac{1}{7} \sum_{k=-3}^3 y_k; \quad A_1 = \frac{1}{28} \sum_{k=-3}^3 k y_k;$$

$$A_2 = \frac{1}{84} (5y_{-3} - 3y_{-1} - 4y_0 - 3y_1 + 5y_3);$$

$$A_3 = \frac{6}{216} (-y_{-3} + y_{-2} + y_{-1} - y_1 - y_2 + y_3).$$

Примечание. Простота нахождения многочленов в случае равноотстоящих значений аргумента показывает, как важно при планировании эксперимента учитывать возможности дальнейшей математической обработки экспериментальных данных.



Примеры

Формула	Преобразование	Выравненная формула
$y = Ae^{ax}$	$Y = \ln y; \quad X = x$	$Y = aX + \ln A$
$y = Ax^a$	$Y = \ln y; \quad X = \ln x$	$Y = aX + \ln A$
$v = \frac{1}{ax+b}$	$Y = \frac{1}{y}; \quad X = x$	$Y = aX + b$
$v = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx$	$Y = \psi(2y-1); \quad X = x$	$Y = \frac{1}{\sigma} X + \left(-\frac{a}{\sigma}\right)$

$\psi$  — функция, обратная интегралу вероятностей (см. табл. 16.1)

**5. Подбор вида формулы.** Если вид формулы неизвестен, то ее подбирают по характеру расположения точек  $(x_k, y_k)$  на графике, пользуясь таблицами кривых.

Если подбор формулы производится на небольшом участке, где практически пригодны многие формулы, то обычно ограничиваются наиболее простыми функциями, например многочленами невысоких степеней, дробно-линейными функциями

$\left(y = \frac{1}{ax+b} + c\right)$ , показательными или логарифмическими функциями. Для периодических функций подбирают тригонометрический полином.

При подборе формул с двумя параметрами широко применяется графическое выравнивание при помощи функциональных сеток (логарифмическая бумага, полулогарифмическая бумага, клетчатка вероятностей и т. п.). Например, если на полулогарифмической бумаге точки  $(x_k, y_k)$  ложатся на прямую линию, то зависимость  $y$  от  $x$  описывается показательной функцией  $(y = Ae^{ax})$ .

## 16.4. Сглаживание эмпирических данных

Сглаживание применяется при экспериментальном изучении зависимости  $y$  от  $x$  для исключения случайных ошибок измерения значений  $y$ .

Сглаживание заключается в исправлении каждого измеренного значения  $y_0$  путем учета близких к нему значений  $y_{\pm 1}, y_{\pm 2}, \dots$

Сглаживание производится в предположении, что в некоторой окрестности точки  $x_0$  истинная зависимость  $y$  от  $x$  достаточ-

но хорошо выражается многочленом невысокой степени. Значение этого многочлена в точке  $x_0$  и принимается за исправленное значение  $y_0$ .

При сглаживании многочленом второй или третьей степени для равноотстоящих значений аргумента пользуются формулой

$$v_0 = A_0 - c_2 A_2,$$

где

$$A_0 = \frac{1}{2M+1} \sum_{k=-M}^M y_k; \quad A_2 = \frac{1}{B_2} \sum_{k=-M}^M y_k (k^2 - c^2);$$

значения  $c_2$  и  $B_2$  даны в табл. 16.5.

Наиболее распространена *формула сглаживания по семи точкам*

$$v_0 = \frac{1}{21} [7y_0 + 6(y_1 + y_{-1}) + 3(y_2 + y_{-2}) - 2(y_3 + y_{-3})],$$

где  $y_k$  — значения функции для равноотстоящих значений аргумента  $x_k = x_0 + hk$  ( $k = 0; \pm 1; \pm 2; \pm 3$ ).

Эта формула применяется для сглаживания всех значений  $y$ , кроме трех первых и трех последних.

## Раздел 2

# **Элементы основ электротехники. Единицы измерения физических величин**

## 17. ЭЛЕМЕНТЫ ОСНОВ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

### 17.1. Основные понятия и определения электротехники

#### 17.1.1. Электрический ток и его частота

Одним из основных понятий электротехники является понятие об *электрическом токе*.

*Электрический ток* — это направленное движение электрических зарядов в веществе или вакууме под воздействием электромагнитного поля. Ток характеризуется силой, измеряемой в амперах (А). Один ампер соответствует перемещению через поперечное сечение проводника в течение одной секунды (с) заряда электричества величиной в один кулон (Кл):

$$1\text{ А} = 1 \frac{\text{Кл}}{\text{с}}.$$

В общем случае, обозначив ток буквой  $i$ , а заряд  $q$ , получим

$$i = \frac{dq}{dt}.$$

Следует отметить, что существует ряд других определений электрического тока, среди которых особое место занимает до сих пор не вполне осмысленное определение Майкла Фарадея (в современной интерпретации): *электрический ток есть ось сил, в направлении которых действует электромагнитное поле*.

По типу носителей электрических зарядов и среды их перемещения различают *токи проводимости, смещения и переноса*. Проводимость делят на *электронную и ионную*.

Для установившихся режимов различают два вида токов: *постоянный и переменный*. Постоянным называют ток, который может изменяться по величине, но не изменяет своего знака сколь угодно долгое время. Переменным называют ток, который периодически изменяется как по величине, так и по знаку. Переменные токи подразделяют на синусоидальные и несину-

соидальные. Синусоидальным называют ток, изменяющийся по гармоническому закону:

$$i = I_m \sin \omega t,$$

где  $I_m$  — амплитудное (наибольшее) значение тока, А.

Скорость изменения переменного тока характеризуется его частотой, определяемой как число полных повторяющихся колебаний в единицу времени. Частота обозначается буквой  $f$  и измеряется в герцах (Гц). Так, частота тока в сети 50 Гц соответствует 50 полным колебаниям в секунду. Угловая частота  $\omega$  — скорость изменения тока в радианах в секунду и связана с частотой простым соотношением:

$$\omega = 2\pi f.$$

Установившиеся (фиксированные) значения постоянного и переменного токов обозначают прописной буквой  $I$ , неустановившиеся (мгновенные) значения — строчной буквой  $i$ .

Условно положительным направлением тока считают направление движения положительных зарядов.

### 17.1.2. Электродвижущая сила, электрическое напряжение

При преобразовании других видов энергии в электрическую в преобразователях энергии возникает *электродвижущая сила (ЭДС)*, потенциально способная совершать работу по перемещению в электрической цепи электрических зарядов. ЭДС измеряется в *вольтах (В)* и обозначается латинской буквой  $E$  или  $e$ .

Если источник ЭДС подключить к замкнутой цепи, то она окажется под воздействием электромагнитного поля, а на ее участках установятся *разности электрических потенциалов или напряжения*.

*Электрическое напряжение* — это величина, численно равная работе по перемещению единицы электрического заряда между двумя произвольными точками электрической цепи. Напряжение, как и ЭДС, измеряется в *вольтах (В)*. Установившиеся значения напряжения обозначают прописной буквой  $U$ , неустановившиеся значения — строчной буквой  $u$ . По аналогии с током различают постоянное и переменное напряжения. Постоянное напряжение может изменяться по величине, не изменяя при этом своего знака.

Переменное напряжение периодически изменяет и величину, и знак. В электротехнике, в основном, имеют дело с синусоидальным напряжением, описываемым уравнением:

$$u = U_m \sin \omega t,$$

где  $U_m$  – амплитудное значение напряжения, В.

Специальные преобразователи позволяют получать также периодически изменяющиеся напряжения произвольной формы.

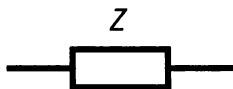
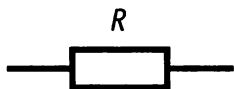
### 17.1.3. Электрическая цепь

*Электрической цепью называется, в общем случае, совокупность определенным образом соединенных источников, преобразователей и потребителей электрической энергии. Электрические цепи состоят из ветвей, соединяемых в узлах электрической цепи (рис. 17.1). Ветвью цепи называют группу последовательно соединенных источников электрической энергии и ее потребителей, по которым протекает один и тот же электрический ток. Если ветвь содержит источник электрической энергии, то ее называют активной. Если ветвь содержит только приемники электрической энергии, то такую ветвь называют пассивной. Узлами электрической цепи называют точки, в которых соединены не менее трех ветвей.*

### 17.1.4. Электрическое сопротивление и его виды

Любые устройства, служащие для получения, передачи или потребления электроэнергии, обладают сопротивлением.

*Электрическое сопротивление – это способность элемента электрической цепи противодействовать в той или иной степени прохождению по нему электрического тока. Сопротивление, в общем случае, зависит от материала элемента, его размеров, температуры, частоты тока и измеряется в омах (Ом). Различают активное (омическое), реактивное и полное сопротивления. Они обозначаются соответственно  $r$ ,  $x$ ,  $z$ . Используются также прописные буквы  $R$ ,  $X$ ,  $Z$  чаще всего для обозначения элементов на электрических схемах:*



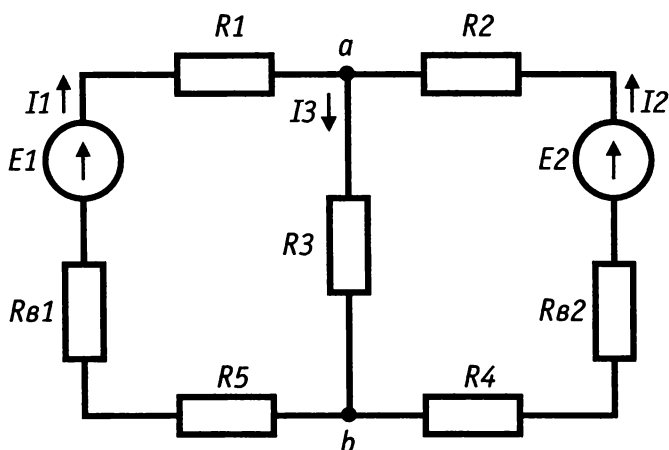


Рис. 17.1. Электрическая схема цепи, содержащей два источника ЭДС с внутренними сопротивлениями  $R_{b1}$  и  $R_{b2}$ , две активные и одну пассивную ветви, соединенные в узлах  $a$  и  $b$

**Активное сопротивление элемента** — это сопротивление постоянному току, Ом:

$$r = \rho \frac{l}{S},$$

где  $\rho$  — удельное сопротивление материала, Ом·м,

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha t);$$

$\alpha$  — температурный коэффициент сопротивления,  $^{\circ}\text{C}^{-1}$ ;

$t$  — интервал изменения температуры,  $^{\circ}\text{C}$ ;

$l$  — длина проводника, м;

$S$  — поперечное сечение проводника,  $\text{м}^2$ .

Природу активного или омического сопротивления, связанного с нагревом материала, по которому протекает ток, объясняют столкновением носителей заряда с узлами кристаллической решетки этого материала.

Если электрическое сопротивление цепи или его элемента не зависит от величины проходящего тока, то такие цепи или элементы называют *линейными*. В противном случае говорят о *нелинейных цепях*.

**Проводимость (активная)** — величина обратная омическому сопротивлению и измеряемая в *сименсах* (См):

$$g = \frac{1}{r}.$$

В зависимости от величины удельной проводимости или удельного сопротивления электротехнические материалы делят на проводники и диэлектрики или изоляторы (более подробные сведения в главе 21).

*Индуктивное сопротивление* — это сопротивление элемента, связанное с созданием вокруг него переменного или изменяющегося магнитного поля. Оно зависит от конфигурации и размеров элемента, его магнитных свойств и частоты тока:

$$x_L = 2\pi fL = \omega L,$$

где  $x_L$  — индуктивное сопротивление, Ом;

$f$  — частота тока, Гц;

$\omega = 2\pi f$  — угловая частота, рад/с;

$L$  — индуктивность элемента цепи, (Гн).

*Индуктивность* можно определить как меру магнитной инерции элемента в отношении электромагнитного поля. По смыслу индуктивность в электротехнике можно уподобить массе в механике. Например, чем больше индуктивность элемента, тем медленнее и тем большую энергию магнитного поля он запасает.

Следует отметить, что индуктивным сопротивлением и, следовательно, индуктивностью обладают в разной мере все элементы электрической цепи переменного тока: обмотки электрических машин, провода, шины, кабели и т. д. В цепях постоянного тока индуктивное сопротивление проявляется лишь в *переходных режимах*.

Выражения для определения индуктивности элементов различной конфигурации приведены в разделе 17.4.

Индуктивное сопротивление обозначается на электрических схемах:



*Емкостное сопротивление* — это сопротивление элемента, связанное с созданием внутри и вокруг него электрического поля. Оно зависит от материала элемента, его размеров, конфигурации и частоты тока; измеряется в омах (Ом):

$$x_c = \frac{1}{2\pi fC} = \frac{1}{\omega C},$$

где  $C$  — электрическая емкость, Ф.

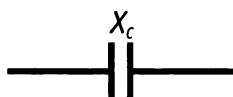
Электрическую емкость можно определить как меру инертности элемента электрической цепи по отношению к электромагнитному полю. Электрическое поле между обкладками конденсатора создается вследствие разделения зарядов. Разделение зарядов происходит благодаря *токам смещения* в диэлектрике между обкладками конденсатора под воздействием внешнего напряжения. Ток смещения следует понимать как процесс переориентации электрических диполей диэлектрика вдоль электромагнитного поля. Как видно, определение для тока, предложенное Фарадеем, наиболее привлекательно для понимания сути токов смещения.

Таким образом, электромагнитная энергия аккумулируется в конденсаторе в виде энергии электрического поля, сконцентрированного в поляризованном диэлектрике между обкладками конденсатора.

Если напряжение, приложенное к конденсатору, постоянно, то происходит его единичный заряд, после завершения которого ток через конденсатор уменьшаясь стремится к нулю. При переменном напряжении происходит периодический перезаряд конденсатора, поскольку токи смещения изменяют свой знак под воздействием периодически изменяющего свой знак напряжения.

Практически все элементы электрической цепи переменного и постоянного тока в разной мере обладают емкостью. Для линий электропередач учет емкости проводов друг по отношению к другу и по отношению к земле имеет принципиальное значение, поскольку влияет на режим электрических сетей. Например, обычные электрические кабели обладают емкостным сопротивлением порядка 10 Ом на 1 км.

На электрических схемах емкостные сопротивления обозначаются:



Выражения для определения емкости элементов различной конфигурации приведены в разделе 17.4.

*Реактивная проводимость*, соответственно, делится на индуктивную, См,

$$B_L = \frac{1}{X_L}$$

и емкостную, См,

$$B_C = \frac{1}{X_C}.$$

### 17.1.5. Электрическая энергия и мощность

*Электрическая энергия* — это способность электромагнитного поля производить работу, преобразовываясь в другие виды энергии.

Электроэнергия — наиболее совершенный и универсальный вид, сравнительно легко преобразующийся в другие виды энергии: механическую, тепловую, световую, химическую и др.

Совершение работы связано с перемещением зарядов через элементы, обладающие сопротивлением. Единица измерения электроэнергии (работы) — джоуль (Дж). Она соответствует работе по перемещению заряда в один кулон между точками цепи с напряжением в один вольт:  $1 \text{ Дж} = 1 \text{ В} \cdot 1 \text{ Кл}$ .

*Электрическая мощность* — это работа по перемещению электрических зарядов в единицу времени.

Единица измерения мощности — ватт (Вт),  $\text{Вт} = \frac{\text{Дж}}{\text{с}}$ .

Различают активную, реактивную и полную мощности.

*Активная мощность* — это мощность, связанная с преобразованием электроэнергии в тепловую или механическую энергию.

В цепях постоянного тока активная мощность, Вт,

$$P = UI = I^2 r;$$

в цепях переменного синусоидального тока

$$P = UI \cos \varphi = I^2 r,$$

где  $U$  — действующее значение напряжения, В,  $U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$ ;

$I$  — действующее значение тока, А,  $I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$ .

$\varphi$  — угол сдвига между векторами напряжения и тока, град.

*Реактивная (индуктивная) мощность* в цепях переменного синусоидального тока в установившихся режимах связана с созданием магнитных полей в элементах цепи и покрытием потерь на так называемые магнитные поля рассеяния этих элементов.

$$Q_L = UI \sin \varphi = I^2 x_L.$$

*Реактивная (емкостная) мощность* в цепях переменного синусоидального тока в установившихся режимах направлена на создание электрических полей в диэлектрических средах элементов цепи.

$$Q_C = UI \sin \varphi = I^2 x_C.$$

Единица измерения реактивной мощности — вар.

В цепях постоянного тока в установившихся режимах реактивные мощности равны нулю.

Полная мощность элемента в цепи переменного синусоидального тока определяется как геометрическая сумма активной и реактивной мощностей:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}, \text{ или } S = UI, \text{ или } S = I^2 z,$$

где  $z = \sqrt{r^2 + (x_L - x_C)^2}$  — полное сопротивление цепи, Ом.

Единица измерения полной мощности — В·А

## 17.2. Основные законы электротехники

**Закон Кулона.** Сила взаимодействия между двумя точечными неподвижными зарядами  $q_1$  и  $q_2$ , расположенными на расстоянии  $R$  друг от друга в однородной среде прямо пропорциональна величине зарядов и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними:

$$F_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_r \epsilon_0 R^2}.$$

**Закон Ома** справедлив для цепей постоянного и переменного синусоидального тока и связывает между собой величины сопротивления элемента цепи, его тока и напряжения.

Падение напряжения на участке цепи пропорционально току и величине сопротивления этого участка:

при постоянном токе  $U = Ir$ ,

при переменном токе  $U = Iz$ .

Например, для электрической цепи (рис. 17.1):  $U_1 = I_1 R_1$ .

Обобщенный закон Ома имеет место для цепи (ветви)  $mn$  постоянного или переменного тока, содержащей источники ЭДС  $E_j$  и сопротивления  $r_k$  или  $z_k$ :

при постоянном токе  $I_{mn} \sum r_k = U_{mn} + \sum E_j$ ,

при переменном токе  $I_{mn} \sum z_k = U_{mn} + \sum E_j$ ,

где  $U_{mn}$  — напряжение между началом и концом ветви  $mn$ ;

$\sum E_j$  — алгебраическая сумма всех векторов ЭДС, находящихся в ветви переменного тока;

$\sum r_k$  — арифметическая сумма всех сопротивлений в ветви;

$\sum z_k$  — геометрическая сумма всех сопротивлений в ветви при переменном токе.

Из обобщенного закона Ома следует, в частности, что напряжение на зажимах источника ЭДС равно величине ЭДС минус падение напряжения на внутреннем сопротивлении источника.

**Первый закон Кирхгофа.** Алгебраическая сумма всех токов, сходящихся в любом узле электрической цепи, равна нулю.

Первый закон Кирхгофа является одним из непосредственных следствий закона сохранения энергии.

Для цепи постоянного тока:

$$\sum_{k=1}^n I_k \text{ или } I_1 + I_2 + \dots + I_n = 0.$$

Для цепи переменного тока:

$$\sum_{k=1}^n I_k \text{ или } I_1 + I_2 + \dots + I_n = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n i_k \text{ или } (\pm i_1) + (\pm i_2) + \dots + (\pm i_n) = 0,$$

где  $I_k$  — комплексные действующие значения синусоидальных токов;

$i_k = I_{km} \sin(\omega t \pm \phi_k)$  — мгновенные значения токов.

**Второй закон Кирхгофа.** Алгебраическая сумма электродвижущих сил какого-либо замкнутого контура электрической цепи равна алгебраической сумме падений напряжений в нем.

Для цепей постоянного тока:

$$\sum_{k=1}^n E_k = \sum_{i=1}^n I_i r_i, \text{ или } E_1 + E_2 + \dots + E_n = I_1 r_1 + I_2 r_2 + \dots + I_m r_m.$$

Для цепей переменного тока:

$$\sum_{k=1}^n E_k = \sum_{i=1}^n U_i; \quad \sum_{k=1}^n e_k = \sum_{i=1}^n u_i,$$

где  $e_k$  — мгновенные значения переменных ЭДС;

$u_i$  — мгновенные значения падения напряжений на пассивных элементах контура;

$E_k$  — векторы действующих значений ЭДС;

$U_i$  — векторы действующих значений падений напряжений.

Направление обхода контура выбирается произвольным. ЭДС имеют знак плюс, если их направление совпадает с направлением обхода контура. Падения напряжений имеют знак плюс, если выбранные знаки токов в ветвях контура совпадают с направлением обхода контура.

Законы Кирхгофа и Ома справедливы и для магнитных цепей.

**Закон электромагнитной индукции Фарадея.** Закон связывает ЭДС, наводимую в произвольном контуре или проводнике, помещенном в магнитное поле, со скоростью изменения магнитного потока поля или скоростью движения контура или проводника относительно неизменного по величине магнитного потока поля. ЭДС измеряется в вольтах (В).

Электродвижущая сила  $e$ , наводимая в проводнике или контуре, пропорциональна скорости изменения магнитного потока  $\Phi$ , пронизывающего этот проводник или контур, взятой со знаком минус:

$$e = - \frac{d\Phi}{dt}.$$

Если контур содержит  $\omega$  витков, то говорят о потокоцеплении контура  $\Psi = \omega\Phi$ , тогда

$$e = - \frac{d\Psi}{dt}.$$

В соответствии с законом Фарадея изменение тока, протекающего в контуре с индуктивностью  $L$ , вызывает изменения его магнитного потока, что наводит в этом контуре ЭДС, называемую ЭДС самоиндукции:

$$e = -L \frac{di}{dt}.$$

ЭДС взаимной индукции наводится в одном из магнитно-связанных контуров, если в другом происходит изменение величины тока:

$$e_2 = (\pm) M_{12} \frac{di_1}{dt},$$

где  $M_{12}$  — коэффициент взаимной индукции, Гн.

Знак (+) ставят при встречных направлениях магнитных потоков, (–) — при согласных направлениях.

При перемещении проводника в магнитном поле с неизменным магнитным потоком в нем наводится ЭДС, В:

$$e = B l v \sin \alpha,$$

где  $B$  — магнитная индукция поля, Тл;

$l$  — длина проводника, м;

$v$  — скорость движения проводника, м/с;

$\alpha$  — угол между векторами магнитной индукции и скорости, град.

При  $\alpha = 0$   $e = B l v$ .

Закон электромагнитной индукции носит фундаментальный характер и лежит в основе принципа действия всех современных электротехнических преобразователей энергии: электрических машин, электрических аппаратов, трансформаторов и т. д.

**Закон Ленца.** Если по произвольному контуру, протекает изменяющийся ток, то он создает собственный изменяющийся магнитный поток, наводящий в контуре противо-ЭДС, направленную так, чтобы воспрепятствовать всякому изменению тока.

Указанную противо-ЭДС называют также ЭДС самоиндукции. Это обстоятельство отмечается в приведенных выше соотношениях знаком минус. Таким образом, появление в контуре с током ЭДС самоиндукции возможно при двух неперменных условиях: изменяющемся характере тока и наличии индуктивности в цепи.

Это свидетельствует об ошибочности представлений некоторых авторов, полагающих, что ЭДС самоиндукции определяет меру электромагнитной инерции элемента цепи. Мерой инерции является величина индуктивности элемента цепи. ЭДС самоиндукции играет в электротехнических устройствах важную роль.

**Закон Джоуля-Ленца.** Закон определяет меру теплового действия электрического тока.

Количество теплоты, выделяющейся током в проводнике, равно работе электрического поля по перемещению заряда за время  $t$ :

$$Q = I U t = I^2 r t.$$

Единица измерения количества теплоты — джоуль (Дж).

Поскольку 1 кал = 4.1868 Дж, а 1 Дж = 0,24 кал, то количество теплоты, измеряемое в калориях:

$$Q = 0,24 I^2 r t.$$

**Закон электромагнитных сил Ампера.** Сила механического взаимодействия проводника с током  $I$  и магнитного поля с индукцией  $B$  прямо пропорциональна произведению магнитной индукции, длины проводника и силы тока в проводнике:

$$F = B l I \sin \alpha,$$

где  $F$  — сила взаимодействия, Н;

$l$  — длина проводника, м;

$\alpha$  — угол между векторами магнитной индукции и тока.

Сила взаимодействия двух достаточно длинных проводов ( $l = l_1 = l_2$ ), расположенных параллельно на расстоянии  $\alpha$ :

$$F = \frac{\mu_r \mu_0}{2\pi\alpha} I_1 \cdot I_2 \cdot l,$$

где  $F$  — сила взаимодействия, Н;

$I_1$  и  $I_2$  — токи в проводах, А;

$\mu_r, \mu_0$  — относительная и абсолютная магнитная проницаемости.

**Закон электролиза Фарадея.** При неизменном токе  $I$ , проходящем через электролит за время  $t$ , из раствора выделяется масса вещества  $M$ , пропорциональная току и времени:

$$M = k I t,$$

где  $M$  — масса, кг;

$k$  — электрохимический эквивалент выделяемого вещества.

**Уравнения Максвелла** для электромагнитного поля для линейной изотропной среды:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{E} + \varepsilon_r \varepsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t \text{ (закон полного тока);}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu_r \mu_0 \partial \mathbf{H} / \partial t \text{ (закон электромагнитной индукции);}$$

$$\mathbf{B} = \mu_r \mu_0 \mathbf{H};$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \mathbf{E},$$

где  $\mathbf{H}$  — вектор напряженности магнитного поля;

$\mathbf{E}$  — вектор напряженности электрического поля;

$\mathbf{B}$  — вектор магнитной индукции;

$\mathbf{D}$  — вектор тока смещения;

$\gamma \mathbf{E} = \mathbf{J}$  — вектор плотности тока проводимости;

$\gamma$  — удельная проводимость среды;

$\mu_r, \mu_0$  — относительная и абсолютная магнитная проницаемости;

$\varepsilon_r, \varepsilon_0$  — относительная и абсолютная электрические постоянные.

### 17.3. Основные понятия и законы для магнитных цепей

Магнитная индукция для участка цепи, Тл,

$$B = \Phi / S,$$

где  $\Phi$  — магнитный поток; Вб;  $S$  — поперечное сечение участка, м<sup>2</sup>.

Магнитодвижущая сила цепи (МДС), А,

$$F_m = wI,$$

где  $w$  — число витков катушки;

$I$  — ее ток, А.

Магнитное напряжение для участка цепи, А,

$$U_m = Hl = \Phi R_m,$$

где  $H$  — напряженность магнитного поля, А/м,

$$H = \frac{B}{\mu_r \mu_0};$$

$R_m$  — магнитное сопротивление участка, 1/Гн,

$$R_m = \frac{l}{\mu_r \mu_0 S};$$

$l$  — средняя длина магнитного участка, м.

Магнитная проводимость, Гн,

$$g_m = \frac{1}{R_m} = \frac{\mu_r \mu_0 S}{l}.$$

**Первый закон Кирхгофа для магнитной цепи.** Сумма магнитных потоков, сходящихся в узле магнитной цепи, равна нулю:

$$\sum \Phi = 0.$$

**Второй закон Кирхгофа для магнитной цепи.** Сумма МДС магнитного контура равна сумме падений магнитных напряжений:

$$\sum F_m = \sum U_m = \sum Hl = \sum \Phi R_m.$$

Магнитный поток для ферромагнитного участка цепи длиной  $l$ , сечением  $S$ , магнитной проницаемостью  $\mu_r$ :

$$\Phi = BS;$$

$$\Phi = H \mu_0 \mu_r S;$$

$$\Phi = \frac{wI \mu_0 \mu_r S}{l}.$$

Переменный магнитный поток, возбуждаемый в магнитопроводе катушкой с числом витков  $w$ , к которой приложено напряжение  $u(t)$ :

$$\Phi(t) = \frac{1}{w} \int u(t) dt + \Phi_0.$$

т. е. закон изменения магнитного потока полностью определяется напряжением на обмотке и не зависит от параметров магнитной цепи.

$\Phi_0 = 0$ , если постоянная составляющая потока в магнитопроводе отсутствует.

Поскольку

$$u = \frac{d\Psi}{dt} = L \frac{di}{dt}, \text{ где } i(t) = \frac{H(t)l}{w}, L = f(i),$$

то

$$u = L(i) \frac{di}{dt}.$$

Это означает, что уравнения электрических цепей переменного тока, содержащих обмотку с магнитопроводом, нелинейны. Следовательно, при синусоидальном напряжении на обмотке ее ток оказывается *несинусоидальным*.

*Энергия магнитного поля*, сосредоточенного в объеме  $V$  постоянного магнита, Дж:

$$W = \frac{HB}{2} V.$$

Магнитные потери, связанные с перемагничиванием магнитопроводов в объеме  $V$ , Вт:

$$\Delta P_m = f W_\mu V,$$

где  $W_\mu$  — потери энергии в единице объема, Дж/м<sup>3</sup>;

$f$  — частота перемагничивания магнитопровода, Гц.

*Энергия электромагнитного поля системы контуров или катушек*, по которым протекают токи  $i_k$ , Дж:

$$W = \frac{1}{2} i_k \Psi_k,$$

где  $\Psi_k$  — потокоцепление  $k$ -го контура или катушки.

*Энергия электромагнитного поля двух контуров или катушек*, Дж:

$$W = \frac{L_1 i_1^2}{2} + \frac{L_2 i_2^2}{2} \pm M i_1 i_2,$$

где  $L_1$  и  $L_2$  — индуктивности контуров или катушек, Гн;

$M$  — взаимная индуктивность между первым и вторым контурами или катушками, Гн.

Знак (+) соответствует согласному включению контуров (катушек), знак (−) — встречному.

## 17.4. Формулы для расчета емкости и индуктивности

*Емкость* конденсаторов, проводов и других элементов электрической цепи измеряется в *фарадах* (Ф); *индуктивность* проводов, катушек и других элементов цепей измеряется в *генри* (Гн).

*Емкость плоского конденсатора*, состоящего из  $n$  пластин площадью пластины  $S$  (м<sup>2</sup>), Ф:

$$C = \frac{(n-1)\epsilon_r\epsilon_0 S}{d},$$

где  $d$  — расстояние между пластинами, м.

*Емкость цилиндрического конденсатора* (коаксиального кабеля) длиной  $l$  (м), Ф:

$$C = \frac{2\pi\epsilon_r\epsilon_0 l}{\ln \frac{R_2}{R_1}},$$

где  $R_1$  — радиус внутренней обкладки (жилы), м;

$R_2$  — радиус внешней обкладки, м.

*Емкость прямолинейного провода* длиной  $l$  и радиусом поперечного сечения  $r$  (м) (второй провод — в бесконечности), Ф:

$$C = \frac{\epsilon_r 10^{-9} l}{18 \ln \left( \frac{2l}{r} - 1 \right)}.$$

*Индуктивность уединенного прямолинейного провода* круглого сечения радиусом  $r$  и длиной  $l$  (м), Гн:

$$L = 2 \cdot 10^{-7} l \left( \ln \frac{2l}{r} - 0,75 \right).$$

*Индуктивность кольца* со средним радиусом  $R$  и радиусом сечения кольца  $r_0$  (м), Гн:

$$L = 4\pi \cdot 10^{-7} R \left( \ln \frac{8R}{r_0} - 1,75 \right).$$

*Индуктивность многослойной катушки* толщиной обмотки  $d$ , радиусом обмотки  $R$  (от оси до среднего слоя обмотки), длиной  $l$  (м) и числом витков  $w$  (рис. 17.2,а), Гн:

$$L = \frac{0,32 \cdot 10^{-4} R^2 w^2}{6R + 9l + 10d}.$$

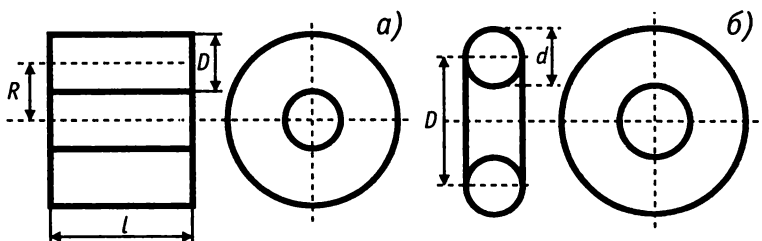


Рис. 17.2

Индуктивность тороидальной катушки кругового сечения (рис. 17.2,б), Гн:

$$L = \frac{\mu_0 w^2}{2} \frac{d^2}{D + \sqrt{D^2 - d^2}},$$

где  $w$  — число витков катушки;

$D$  — средний диаметр тора, м;

$d$  — диаметр среднего витка, м.

Взаимная индуктивность двух тороидальных катушек с числами витков  $w_1$  и  $w_2$ , Гн:

$$M = \frac{\mu_0 w_1 w_2}{2} \frac{d^2}{D + \sqrt{D^2 - d^2}}.$$

Взаимная индуктивность концентрических катушек прямоугольного сечения, имеющих одинаковую длину и примыкающих друг к другу (рис. 17.3), Гн:

$$M = \frac{1}{2} (L_{12} - L_1 - L_2),$$

где  $L_{12}$  — индуктивность катушки, состоящей из первой и второй катушек;

$L_1, L_2$  — собственные индуктивности катушек.

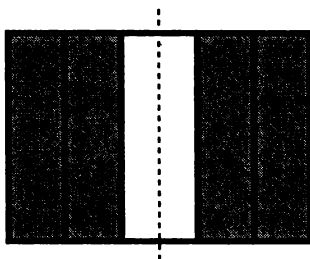


Рис. 17.3. Концентрически расположенные катушки индуктивности

## 17.5. Расчетные формулы для цепей постоянного тока

Методы расчета сложных цепей основываются на применении законов Ома и Кирхгофа. Сложными называют цепи, содержащие произвольное число ветвей  $n_b$ , узлов  $n_y$ , токов  $n_T$  и заданных источников ЭДС. Расчет заключается в определении токов ветвей.

### 17.5.1. Метод контурных токов (метод Максвелла)

Суть метода заключается в следующем. Выбираются независимые контуры (не перекрывающие друг друга) и направления контурных токов  $I_k$  в них. Записывается и решается система  $k$  алгебраических уравнений в соответствии со вторым законом Кирхгофа для каждого контура ( $k$  — число контуров):

$$r_{11} I_{1k} + r_{12} I_{2k} + \dots + r_{1k} I_{1k} = E_{11},$$

$$r_{21} I_{1k} + r_{22} I_{2k} + \dots + r_{2k} I_{2k} = E_{22},$$

.....

.....

$$r_{k1} I_{1k} + r_{k2} I_{2k} + \dots + r_{kk} I_{kk} = E_{kk},$$

где  $r_{nk}$  — сумма сопротивлений ветвей, входящих в контур;  
 $E_{kk}$  — алгебраическая сумма ЭДС, включенных в ветви, образующие контур  $n$ .

Определяются токи ветвей  $I_i$  как алгебраические суммы (разности) соответствующих контурных токов:

$$I_i = I_{nk} \pm I_{(n+1)k}.$$

### 17.5.2. Метод двух узлов

Метод двух узлов используется для цепей, имеющих  $n$  ветвей и два узла  $a$  и  $b$  (например, цепь, представленная на рис. 17.1).

Узловое напряжение определяется по формуле, В,

$$U_{ав} = \frac{\sum_n E_n g_n}{\sum_m g_m},$$

где  $\sum_n E_n g_n$  — алгебраическая сумма произведений ЭДС ветвей на проводимости этих ветвей;

$\sum_m g_m$  — сумма проводимостей всех ветвей, соединяющих узлы *а* и *в*.

### 17.5.3. Метод наложения

Ток в любой ветви может быть рассчитан как алгебраическая сумма токов, вызываемых в ней от ЭДС каждого источника напряжения в отдельности. При расчете токов, вызванных каким-либо одним источником ЭДС, другие источники ЭДС замыкаются накоротко.

### 17.5.4. Метод эквивалентного генератора

Для определения тока *I* в произвольной ветви *ав* с сопротивлением *r*, нужно разомкнуть эту ветвь и часть цепи, подключенную к этой ветви, заменить эквивалентным генератором с ЭДС  $E_r$  и внутренним сопротивлением  $r_r$ . Расчет  $E_r$  ведется любым известным способом. Расчет  $r_r$  ведут, полагая, что оно равно входному сопротивлению цепи с замкнутыми источниками ЭДС относительно *ав*. Определяют ток в искомой ветви, *A*,

$$I = \frac{E_r}{r_r + r}.$$

### 17.5.5. Преобразование сложных цепей в простые эквивалентные

Замена *n* последовательно соединенных сопротивлений эквивалентным, Ом:

$$r_3 = \sum_{k=1} r_k = r_1 + r_2 + \dots + r_n.$$

Замена  $n$  параллельно соединенных сопротивлений эквивалентным:

$$\frac{1}{r_3} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \dots + \frac{1}{r_n} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{r_i}.$$

Переходя к проводимостям, См, получим

$$g_3 = \sum g_i.$$

Эквивалентное сопротивление при смешанном соединении сопротивлений складывается из суммы последовательно соединенных сопротивлений и эквивалентного значения параллельно соединенных.

*Преобразование треугольника сопротивлений (рис. 17.4, а) в эквивалентную звезду (рис. 17.4, б) и обратное преобразование.*

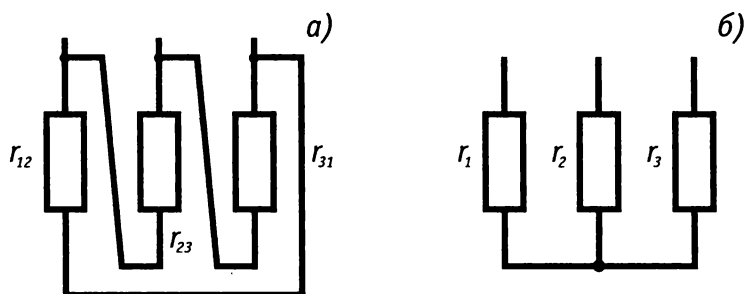


Рис. 17.4. Схемы соединения сопротивлений треугольником (а) и звездой (б)

$$r_1 = \frac{r_{12}r_{31}}{r_{12} + r_{23} + r_{31}}; \quad r_2 = \frac{r_{23}r_{12}}{r_{12} + r_{23} + r_{31}}; \quad r_3 = \frac{r_{31}r_{23}}{r_{12} + r_{23} + r_{31}};$$

$$r_{12} = r_1 + r_2 + \frac{r_1 r_2}{r_3}; \quad r_{23} = r_2 + r_3 + \frac{r_2 r_3}{r_1}; \quad r_{31} = r_3 + r_1 + \frac{r_3 r_1}{r_2},$$

где  $r_1, r_2, r_3$  — сопротивления ветвей звезды;

$r_{12}, r_{23}, r_{31}$  — сопротивления ветвей треугольника.

### 17.5.6. Баланс электрических мощностей цепи

Для любой замкнутой цепи сумма мощностей источников электрической энергии  $P_u$  равна сумме мощностей  $P_n$ , расходуемых в приемниках энергии:

$$\sum_{i=1}^n P_{ui} = \sum_{k=1}^m P_{nk}, \text{ или } \sum_{i=1}^n E_i I_i = \sum_{k=1}^m I_k^2 r_k,$$

где  $n$  — число источников электрической энергии;  
 $m$  — число приемников электроэнергии.

## 17.6. Переходные процессы в цепях постоянного тока

В общем случае для цепи, содержащей источники ЭДС  $e_j$ , сопротивления  $r_j$ , индуктивности  $L_j$ , взаимноиндуктивности  $M_j$  и емкости  $C_j$ , для определения искомого тока  $i$  записывают линейное однородное дифференциальное уравнение в соответствии со вторым законом Кирхгофа для данного контура:

$$\sum e_k = \sum \left( i_k r_k + L_k \frac{di_k}{dt} + M_{km} \frac{di_m}{dt} + \frac{1}{C_k} \int i_k dt \right).$$

Ток, являющийся общим решением этого уравнения, представляют в виде двух составляющих:

$$i = i_{св} + i_{в},$$

где  $i_{св}$  — свободный ток — составляющая, действующая лишь в переходном режиме;

$i_{в}$  — вынужденный ток — составляющая, действующая в установившемся режиме.

Ток  $i_{св}$  получают как частное решение этого уравнения со свободным членом при  $t = \infty$ .

Ток  $i_{в}$  получают как общее решение уравнения без свободного члена.

Приведем примеры решений для некоторых типовых цепей.

а) Включение цепи, содержащей последовательно соединенные резистор сопротивлением  $r$  и индуктивность  $L$ , на постоянное напряжение  $U$  (рис. 17.5):

$$U = L \frac{di}{dt} + ir, \text{ или } L \frac{di}{dt} + ir - U = 0. \quad (a-1)$$

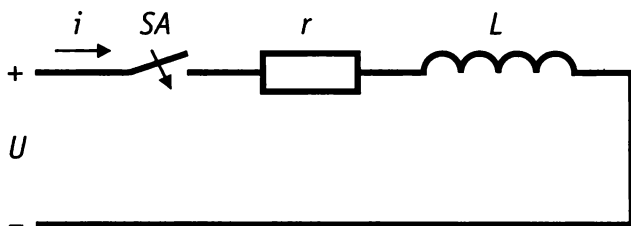


Рис. 17.5. Включение цепи  $r$ - $L$  на постоянное напряжение  $U$

Вынужденная составляющая тока

$$i_{\text{в}} = \frac{U}{r}. \quad (\text{a-2})$$

Уравнение без свободного члена

$$L \frac{di_{\text{св}}}{dt} + i_{\text{св}} r = 0. \quad (\text{a-3})$$

Его характеристическое уравнение

$$Lp + r = 0; \quad p = -\frac{r}{L}. \quad (\text{a-4})$$

Общее решение уравнения (a-3)

$$i_{\text{св}} = Ae^{kt} = Ae^{-\frac{r}{L}t}.$$

Общее решение уравнения (a-1)

$$i = i_{\text{в}} + i_{\text{св}} = \frac{U}{r} + Ae^{-\frac{r}{L}t}. \quad (\text{a-5})$$

Постоянную  $A$  находят из (a-5), полагая  $i = 0$  при  $t = 0$ :

$$0 = \frac{U}{r} + Ae^{-0}, \quad A = -\frac{U}{r}.$$

Решение уравнения (a-1)

$$i = \frac{U}{r} \left( 1 - e^{-\frac{r}{L}t} \right). \quad (\text{a-6})$$

или, полагая  $\tau = \frac{L}{r}$  (постоянная времени),

$$i = \frac{U}{r} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right). \quad (\text{a-7})$$

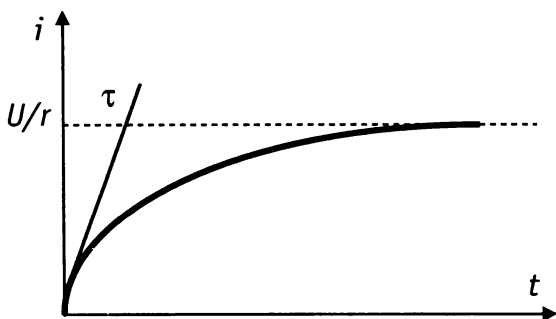


Рис. 17.6. График изменения тока при включении цепи  $r$ - $L$  на постоянное напряжение

б) При включении цепи, содержащей последовательно соединенные резистор с сопротивлением  $r$  и конденсатор  $C$ , на постоянное напряжение  $U$  (рис. 17.7), ее уравнение имеет вид:

$$U = ri + U_c, \quad (6-1)$$

где  $i$  — ток в цепи,  $i = i = \frac{dq}{dt} = C \frac{dU_c}{dt}$ ;

$U_c$  — падение напряжения на конденсаторе.

$$U = rC \frac{dU_c}{dt} + U_c. \quad (6-2)$$

Решение (6-2) ищется в виде

$$U_c = U_{c(\vartheta)} + U_{c(c\vartheta)} \text{ и } U_{c\vartheta} = U. \quad (6-3)$$

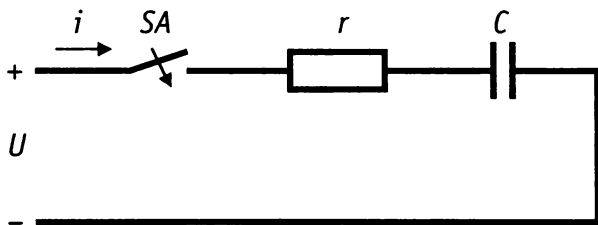


Рис. 17.7. Включение цепи  $r$ - $C$  на постоянное напряжение  $U$

Характеристическое уравнение для (6-2)

$$rCp + 1 = 0; \quad p = -\frac{1}{rC}. \quad (6-4)$$

Свободная составляющая напряжения  $U_{c(cв)}$

$$U_{c(cв)} = Ae^{-\frac{1}{rC}t}. \quad (6-5)$$

Решение уравнения (6-2)

$$U_c = U + Ae^{-\frac{t}{rC}}. \quad (6-6)$$

Поскольку в начальный момент  $t = 0$ ,  $U_c = 0$ , то  $A = -U$ , следовательно, искомое решение:

$$U_c = U\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right), \quad (6-7)$$

где  $\tau = rC$  — постоянная времени цепи.

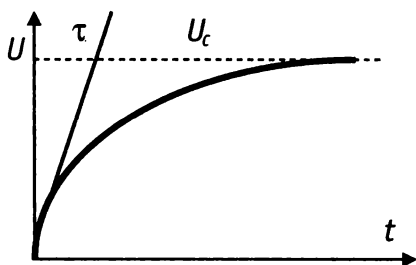


Рис. 17.8. График изменения напряжения  $U_c$  на конденсаторе при включении цепи  $r$ - $C$  на напряжение  $U$

## 17.7. Расчетные формулы для цепей однофазного тока

### 17.7.1. Переменные токи и напряжения

Частота тока и напряжения генератора, вращающегося с угловой скоростью  $\omega$  и имеющего  $p$  пар полюсов, Гц:

$$f = \frac{p\omega}{2\pi}.$$

В цепях переменного тока различают *мгновенные, действующие, средние и амплитудные* значения тока и напряжения.

*Мгновенными* называют значения тока или напряжения в цепи, определяемые для произвольного момента времени  $t$ .

*Мгновенные значения* синусоидальных тока и напряжения:

$$i = I_m \sin(\omega t + \Psi_i);$$

$$u = U_m \sin(\omega t + \Psi_u),$$

где  $I_m$  и  $U_m$  — амплитудные значения тока и напряжения;

$\Psi_i$  и  $\Psi_u$  — углы сдвига фаз тока и напряжения относительно начала координат;

$\Psi_u - \Psi_i = \varphi$  — угол сдвига фазы тока относительно фазы напряжения.

*Действующим* называют значение такого периодического тока, который производит тот же тепловой эффект, что и равный ему по величине постоянный ток. Действующие значения токов и напряжений являются *среднеквадратичными* значениями их мгновенных значений:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} = 0,707 I_m, \text{ или } I = \frac{I_m}{\sqrt{2}};$$

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}, \text{ или } U = 0,707 U_m.$$

*Средние значения тока и напряжения:*

$$I_{\text{ср.}} = \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} i dt = \frac{2}{\pi} I_m = 0,638 I_m;$$

$$J_{\text{ср.}} = \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} u dt = \frac{2}{\pi} U_m = 0,638 U_m.$$

## 17.7.2. Мощности в цепях переменного тока

1. Мгновенное значение мощности в цепи с активным сопротивлением  $r$ , Вт:

$$p = ui = U_m I_m \sin^2 \omega t = U_r I (1 - \cos 2\omega t).$$

Среднее значение активной мощности в цепи с активным сопротивлением  $r$ , Вт:

$$P_{\text{ср}} = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = U_r I = I^2 r.$$

2. Цепи с чисто индуктивным сопротивлением:

ток в цепи  $i = I_m \sin \omega t$ , тогда ЭДС самоиндукции

$$e_L = -L \frac{di}{dt} = -\omega L I_m \cos \omega t = -\omega L I_m \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right),$$

т. е. ЭДС отстает от тока, ее вызвавшего, на угол  $\frac{\pi}{2}$ .

Падение напряжения на катушке

$$U_L = \omega L I.$$

Мгновенная мощность катушки

$$p_L = u i = U_m I_m \sin \omega t \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right) = U I \sin 2\omega t.$$

Средняя за период мощность идеальной катушки:

$$P_{\text{ср}} = \frac{1}{T} \int_0^T U I \sin 2\omega t dt = 0.$$

Это означает, что в течение периода идеальная катушка дважды получает от источника энергию, преобразуя ее в магнитное поле, и дважды возвращает ее.

Реактивная мощность катушки, вар,

$$Q_L = U_L I = \omega L I^2 = X_L I^2.$$

3. В цепи с емкостным сопротивлением:

$$u = U_m \sin \omega t;$$

$$i = C \frac{du}{dt} = C \omega U_m \cos \omega t = I_m \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right),$$

т. е. ток в конденсаторе опережает напряжение на угол  $\frac{\pi}{2}$ .

Действующее значение тока, А,  $I = \omega C U = \frac{U}{X_C}$ .

Емкостное сопротивление, Ом,  $x_c = \frac{1}{\omega C}$ .

Мгновенная мощность

$$p = ui = U_m I_m \sin \omega t \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right) = UI \sin 2\omega t.$$

Средняя мощность

$$P_{\text{ср}} = \frac{1}{T} \int_0^T UI \sin 2\omega t dt = 0.$$

В течение периода конденсатор дважды получает от источника энергию для заряда (создания электрического поля в диэлектрике) и дважды возвращает ее источнику (разряжается).

Реактивная мощность конденсатора, вар,

$$Q_c = U_c I = \frac{i^2}{\omega C} = x_c I^2.$$

Из изложенного следует важный для практики вывод: токи индуктивности и емкости в цепи переменного тока в каждый момент времени направлены в противоположные стороны. Другими словами, в каждый момент времени, когда катушка получает от источника электромагнитную энергию, конденсатор возвращает ее источнику и наоборот.

4. Цепь, содержащая последовательно включенные активное, индуктивное и емкостное сопротивления (рис. 17.9).

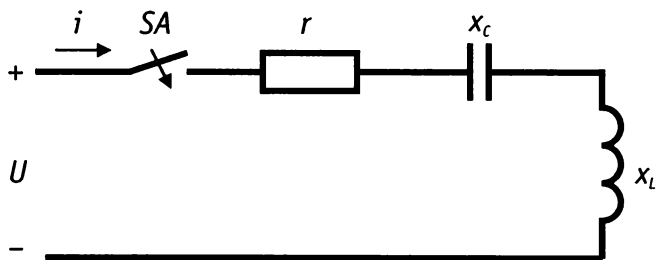


Рис. 17.9

$$U = U_m \sin \omega t;$$

$$i = I_m \sin (\omega t + \varphi).$$

Реактивное сопротивление цепи, Ом,

$$X = X_L - X_C.$$

Полное сопротивление цепи, Ом,

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2}.$$

Угол сдвига фаз между векторами напряжения и тока

$$\varphi = \arccos\left(\frac{R}{Z}\right) = \arccos\frac{U_R}{U}.$$

Коэффициент мощности цепи

$$\cos \omega = \frac{R}{Z} = \frac{U_R}{U} = \frac{P}{S} = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}}.$$

Мгновенное значение приложенного напряжения равно сумме мгновенных значений падений напряжений на участках цепи:

$$u = u_R + u_L + u_C, \text{ или } u = u_R + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt.$$

Мгновенное значение мощности для этой цепи, Вт,

$$p = ui = u_m i_m \sin \omega t \sin(\omega t - \varphi).$$

Среднее значение мощности равно активной мощности, Вт:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u i dt = UI \cos \varphi = I^2 R.$$

Реактивная мощность, вар,

$$Q = UI \sin \varphi = Q_L - Q_C;$$

$$Q_L = I^2 X_L; Q_C = I^2 X_C.$$

Полная мощность, В · А,

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = UI.$$

При  $X_L = X_C$  имеет место *резонанс напряжения*, цепь ведет себя как чисто активная, а ток имеет наибольшее (при  $U = \text{const}$ ) значение.

5. Цепь, содержащая параллельно включенные активное, индуктивное и емкостное сопротивления (рис. 17.10).

В такой цепи все элементы находятся под одинаковым напряжением источника

$$u = U_m \sin \omega t.$$

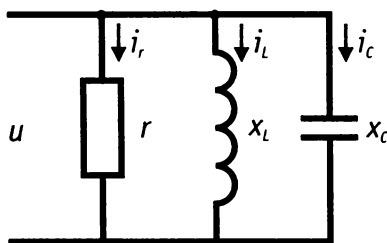


Рис. 17.10. Параллельное соединение элементов

Проводимости элементов цепи:

$$\text{активная, См, } g = \frac{1}{r};$$

$$\text{емкостная, См, } b_c = \frac{1}{x_c};$$

$$\text{индуктивная, См, } b_L = \frac{1}{x_L}.$$

Полная проводимость цепи, содержащей элементы  $R, L, C$ , См:

$$y = \sqrt{g^2 + (b_L - b_c)^2}, \text{ или } y = \frac{1}{z}.$$

Угол сдвига фаз тока и напряжения

$$\varphi = \arctg \frac{b_L - b_c}{g}.$$

Токи в ветвях

$$i_r = ug = gU_m \sin \omega t = I_{mr} \sin \omega t;$$

$$i_L = ub_L = b_L U_m \sin \omega t = I_{mL} \sin \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right);$$

$$i_c = ub_c = b_c U_m \sin \omega t = I_{mc} \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right).$$

Значения мощностей рассчитываются по приведенным выше формулам.

При  $\vartheta_c = \vartheta_L$  имеет место резонанс токов. Общий ток в цепи имеет минимальное значение и активный характер,  $\cos\varphi = 1$ .

На практике параллельное включение конденсаторов в однофазной и трехфазной цепях широко используется для разгрузки питающих линий (проводов, кабелей, шин) от реактивной (индуктивной) составляющей тока. Это позволяет уменьшить потери электроэнергии в передающих линиях, и тем самым экономить ее, выбирать меньшие сечения проводов и кабелей для питания тех же самых электроприемников.

## 17.8. Расчетные соотношения для цепей трехфазного тока

### 17.8.1. Выражения для токов, напряжений и мощностей

Выражения для мгновенных значений трехфазных токов и напряжений фаз  $A$ ,  $B$ ,  $C$  при активной нагрузке имеют вид

$$i_A = I_{mA} \sin \omega t; \quad i_B = I_{mB} \sin \left( \omega t + \frac{2\pi}{3} \right); \quad i_C = I_{mC} \sin \left( \omega t - \frac{2\pi}{3} \right);$$

$$u_A = U_{mA} \sin \omega t; \quad u_B = U_{mB} \sin \left( \omega t + \frac{2\pi}{3} \right); \quad u_C = U_{mC} \sin \left( \omega t - \frac{2\pi}{3} \right),$$

где  $I_{mA}$ ,  $I_{mB}$ ,  $I_{mC}$ , — амплитудные значения токов в фазах;

$U_{mA}$ ,  $U_{mB}$ ,  $U_{mC}$ , — амплитудные значения напряжений.

Мгновенные мощности фаз определяются как произведения каждой фазы:

$$p_A = i_A u_A; \quad p_B = i_B u_B; \quad p_C = i_C u_C$$

Фазы источников и приемников электроэнергии соединяются в звезду и треугольник. При соединении приемника в симметричную звезду фазный ток равен линейному,  $I_\phi = I_L$ ; фазное напряжение в  $\sqrt{3}$  раз меньше линейного,  $U_\phi = \sqrt{3} U_L$ .

Мощность активная фазы, Вт,

$$P_\phi = U_\phi I_\phi \cos\varphi = I^2_\phi r_\phi.$$

Активная мощность симметричного приемника, Вт,

$$P = 3P_\phi = \sqrt{3} U_L I_L \cos\varphi = 3 I^2_\phi r_\phi.$$

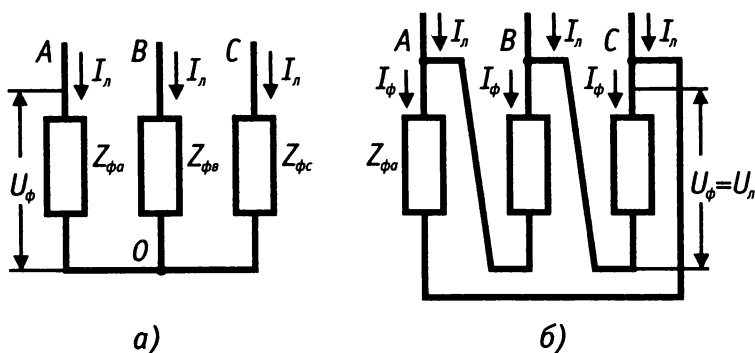


Рис. 17.11. Схемы соединения электроприемника звездой (а) и треугольником (б)

Реактивная мощность симметричного приемника, вар,

$$Q = 3 Q_{\phi} = 3 U_{\phi} I_{\phi} \sin \varphi = \sqrt{3} U_{\text{л}} I_{\text{л}} \sin \varphi = 3 I_{\phi}^2 x_{\phi}.$$

Полная мощность приемника, В · А,

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = 3 U_{\phi} I_{\phi} \sin \varphi = 3 I_{\phi}^2 z_{\phi}$$

$$\text{или } S = \sqrt{3} U_{\text{л}} I_{\text{л}}.$$

При соединении приемника в *симметричный треугольник*:

Фазный ток в  $\sqrt{3}$  раз меньше линейного:

$$I_{\text{л}} = \sqrt{3} I_{\phi}.$$

Фазное напряжение равно линейному:

$$U_{\phi} = U_{\text{л}}.$$

Мощности определяются по приведенным выше формулам.

### 17.8.2. Метод симметричных составляющих

Метод применяется для расчета несимметричных трехфазных систем. Суть метода заключается в разложении заданных или искомых векторов напряжения или тока на сумму векторов прямой, обратной и нулевой последовательности.

Например:

$$U_A = U_0 + U_1 + U_2; U_B = U_0 + U_1 a^2 + U_2 a; U_C = U_0 + U_1 a + U_2 a^2,$$

где  $a = 1 e^{j120}$  — фазовый множитель,  $a^2 = 1 e^{-j120}$ .

Тогда

$$U_0 = (U_A + U_B + U_C);$$

$$U_1 = (U_A + aU_B + a^2U_C);$$

$$U_2 = (U_A + aU_C + a^2U_B).$$

После разложения несимметричной трехфазной системы на симметричные составляющие применяют метод наложения: рассчитывают цепь отдельно для нулевой, прямой и обратной последовательностей.

Активная и реактивная мощности системы

$$P = 3 U_0 I_0 \cos \varphi_0 + 3 U_1 I_1 \cos \varphi_1 + 3 U_2 I_2 \cos \varphi_2;$$

$$Q = 3 U_0 I_0 \sin \varphi_0 + 3 U_1 I_1 \sin \varphi_1 + 3 U_2 I_2 \sin \varphi_2.$$

Полная мощность системы,  $B \cdot A$ ,

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}.$$

## 17.9. Переходные процессы в цепях переменного синусоидального тока

### 17.9.1. Включение цепи r-L на синусоидальное напряжение

В соответствии со вторым законом Кирхгофа переходной процесс включения описывается уравнением:

$$u = U_m \sin(\omega t + \Psi_u) = L \frac{di}{dt} + ri,$$

где  $\Psi_u$  — фаза напряжения.

Расчет переходного процесса заключается в определении выражения для тока цепи в функции от времени.

Ток установившегося режима (частное решение):

$$i_b = I_m \sin(\omega t + \Psi - \varphi),$$

где  $I_m$  — амплитудное значение тока,  $I_m = \frac{U_m}{z}$ ;

$z$  — полное сопротивление цепи,  $z = \sqrt{r^2 + (\omega L)^2}$ ;

$\varphi$  — угол сдвига между напряжением и током,  $\varphi = \arctg \frac{\omega L}{r}$ .

Свободная составляющая тока определяется как общее решение уравнения без свободного члена  $L \frac{di}{dt} + ri = 0$ :

$$i_{св} = A e^{-\frac{t}{\tau}},$$

где  $A$  — постоянная интегрирования,  $A = -I_m \sin(\Psi_u - \varphi)$ ;

$\tau = \frac{L}{r}$  — постоянная времени.

Решение уравнения

$$i = I_m \sin(\omega t + \Psi_u - \varphi) - I_m \sin(\Psi_u - \varphi) e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

### 17.9.2. Включение цепи $r$ - $C$ на синусоидальное напряжение

Уравнение, описывающее переходный процесс при включении цепи  $r$ - $C$  на синусоидальное напряжение, имеет вид:

$$U_m \sin(\omega t + \Psi_u) = ir + u_c = rC \frac{du_c}{dt} + u_c;$$

решение уравнения

$$i = I_m \sin(\omega t + \Psi_u - \varphi) - \frac{I_m}{\omega C r} \cos(\Psi_u - \varphi) e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Таким образом, при переходных процессах включения цепи с последовательно соединенными  $r$ - $L$  и  $r$ - $C$  элементами на синусоидальное напряжение, ток складывается из синусоидальной и экспоненциальной составляющих.

Более подробные сведения о материалах, изложенных в главе, читатель найдет в литературе [12].

## 18. ЕДИНИЦЫ ИЗМЕРЕНИЯ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН В СИСТЕМЕ СИ

### 18.1. Основные единицы в системе СИ

*Метр* (м, m) — единица длины. Метр равен 1650763,73 длин волн в вакууме излучения, соответствующего переходу между уровнями  $2p_{10}$  и  $5d_5$  атома криптона-86.

*Килограмм* (кг, kg) — единица массы, равная массе международного прототипа килограмма.

*Секунда* (с, s) — единица времени, равная 9192631770 периодам излучения, соответствующего переходу между двумя сверхтонкими уровнями основного состояния атома цезия-133.

*Ампер* (А) — единица силы электрического тока. Ампер равен силе неизменяющегося тока, который проходя по двум параллельным прямолинейным проводникам бесконечной длины и бесконечно малого поперечного сечения, расположенным в вакууме на расстоянии 1 м один от другого, вызвал бы на каждом участке проводника длиной 1 м силу взаимодействия, равную  $2 \cdot 10^{-7}$  Н.

*Кельвин* (К) — единица термодинамической температуры, равная  $1/273,16$  части термодинамической температуры тройной точки воды. Допускается применение также градусов Цельсия (обозначается  $t$ ). При этом  $t = T - T_0$ , где  $T_0 = 273,15$  К. Градус Цельсия ( $^{\circ}\text{C}$ ) равен градусу Кельвина (К).

*Моль* (моль, mol) — единица количества вещества, равная количеству вещества системы, содержащей столько структурных элементов, сколько содержится атомов в углероде-12 массой 0,012 г.

*Кандела* (кд, cd) — единица силы света, равная силе света источника, испускающего в заданном направлении монохроматическое излучение частотой  $540 \cdot 10^{12}$  Гц, энергетическая сила света которого в этом направлении составляет  $1/683$  Вт/ср.

### 18.2. Дополнительные единицы в системе СИ

*Радян* (рад, rad) — единица плоского угла, равная углу между двумя радиусами окружности, длина дуги между которыми равна радиусу ( $1 \text{ рад} = 57^{\circ}17'44,8''$ ).

**Стерadian** (ср, sr) — единица телесного угла, равная телесному углу с вершиной в центре сферы, вырезающему на поверхности сферы площадь, равную площади квадрата со стороной, равной радиусу сферы.

### 18.3. Единицы механических величин в системе СИ

Таблица 18.1

Наименование величины	Наименование единицы	Выражение через единицы СИ	Обозначение единицы	
			русское	международное
Длина	метр	м	м	m
Масса	килограмм	кг	кг	kg
Время	секунда	с	с	s
Площадь	кв. метр	м <sup>2</sup>	м <sup>2</sup>	m <sup>2</sup>
Объем, вместимость	куб. метр	м <sup>3</sup>	м <sup>3</sup>	m <sup>3</sup>
Сила, вес	ньютон	кг·м/с <sup>2</sup>	Н	N
Плотность	килограмм на куб. метр	кг/м <sup>3</sup>	кг/м <sup>3</sup>	kg/m <sup>3</sup>
Момент силы	ньютон-метр	кг·м <sup>2</sup> /с <sup>2</sup>	Н·м	N·m
Работа, энергия	джоуль	кг·м <sup>2</sup> /с <sup>2</sup>	Дж	J
Мощность	ватт	кг·м <sup>2</sup> /с <sup>3</sup> = Дж/с	Вт	W
Давление	паскаль	кг/(м·с <sup>2</sup> ) = Н/м <sup>2</sup>	Па	Pa
Количество движения (импульс)	килограмм-метр в секунду	кг·м/с	кг·м/с	kg·m/s
Момент количества движения	килограмм-метр в квадрате в секунду	кг·м <sup>2</sup> /с = Н·м·с	кг·м <sup>2</sup> /с	kg·m <sup>2</sup> /s
Момент инерции (динамический)	килограмм-метр в квадрате	кг·м <sup>2</sup>	кг·м <sup>2</sup>	kg·m <sup>2</sup>
Скорость	метр в секунду	м/с	м/с	m/s
Ускорение	метр на секунду	м/с <sup>2</sup>	м/с <sup>2</sup>	m/s <sup>2</sup>
Угловая скорость	радиан в секунду	с <sup>-1</sup>	рад/с	rad/s
Угловое ускорение	радиан на секунду в квадрате	с <sup>-2</sup>	рад/с <sup>2</sup>	rad/s <sup>2</sup>

Наименование величины	Наименование единицы	Выражение через единицы СИ	Обозначение единицы	
			русское	международное
Период	секунда	с	с	s
Частота периодич. процесса	герц	с <sup>-1</sup>	Гц	Hz

#### 18.4. Единицы электромагнитных величин в системе СИ

Таблица 18.2

Наименование величины	Наименование единицы	Выражение через единицы СИ	Обозначение единицы	
			русское	международное
<i>Электрические величины</i>				
Сила электрического тока	ампер	A	A	A
Количество электричества, заряд	кулон	A·с = Кл	Кл	C
Электрический потенциал, напряжение, ЭДС	вольт	$\text{кг} \cdot \text{м}^2 / (\text{A} \cdot \text{с}^3) = \text{В}$	В	V
Напряженность электрического поля	вольт на метр	$\text{кг} \cdot \text{м} / (\text{A} \cdot \text{с}^3) = \text{В} / \text{м}$	В/м	V/m
Абсолютная диэлектрическая проницаемость	фарад на метр	$\text{A}^2 \cdot \text{с}^4 / (\text{кг} \cdot \text{м}^3)$	Ф/м	F/m
Электрический момент диполя	кулон-метр	A·с·м = Кл·м	Кл·м	C·m
Электрическое смещение	кулон на кв. метр	$\text{A} \cdot \text{с} / \text{м}^2 = \text{Кл} / \text{м}^2$	Кл/м <sup>2</sup>	C/m <sup>2</sup>
Поляризованность	кулон на кв. метр	$\text{A} \cdot \text{с} / \text{м}^2 = \text{Кл} / \text{м}^2$	Кл/м <sup>2</sup>	C/m <sup>2</sup>

Продолжение табл. 18.2

Наименование величины	Наименование единицы	Выражение через единицы СИ	Обозначение единицы	
			русское	между- народ- ное
Электрическая емкость	фарад	$A^2 \cdot c^4 / (кг \cdot м^2) =$ $= c / Ом$	Ф	F
Плотность тока	ампер на кв. метр	$A / м^2$	$A / м^2$	$A / м^2$
Электрическое сопротивление	ом	$кг \cdot м^2 / (A^3 \cdot c^3) =$ $= B / A$	Ом	$\Omega$
Электрическая проводимость	сименс	$A^2 \cdot c^3 / (кг \cdot м^2) =$ $= 1 / Ом$	См	S
Удельное электрическое сопротивление	ом-метр	$кг \cdot м^3 / (A^2 \cdot c^3) =$ $= Ом \cdot м$	Ом·м	$\Omega \cdot m$
Удельная электрическая проводимость	сименс на метр	$A^2 \cdot c^3 / (кг \cdot м^2) =$ $= 1 / Ом \cdot м$	См/м	S/m
Полная мощность	вольт-ампер	$кг \cdot м^2 / c^3$	В·А	V·A
Активная мощность	ватт		Вт	Wt
Реактивная мощность	вар	$кг \cdot м^2 / c^3$	вар	var
<i>Магнитные величины</i>				
Магнитный поток	вебер	$кг \cdot м^2 / (A \cdot c^2) =$ $= B \cdot c$	Вб	Wb
Магнитная индукция	тесла	$кг / (A \cdot c^2) =$ $= B \cdot c / м^2$	Тл	T
Абсолютная магнитная проницаемость	генри на метр	$кг \cdot м / (A^2 \cdot c^2)$	Гн/м	H/m
Магнитный момент электрического тока, магнитный момент диполя	ампер-кв. метр	$A \cdot м^2$	$A \cdot м^2$	$A \cdot м^2$
Намагниченность	ампер на метр	$A / м$	$A / м$	$A / м$
Напряженность магнитного поля	ампер на метр	$A / м$	$A / м$	$A / м$

Наименование величины	Наименование единицы	Выражение через единицы СИ	Обозначение единицы	
			русское	международное
Индуктивность, взаимная индуктивность	генри	$\text{кг} \cdot \text{м}^2 / (\text{А}^2 \cdot \text{с}^2) = \text{Вс} / \text{А} = \text{Вб} / \text{А} = \text{Ом} \cdot \text{с}$	Гн	Н
Магнитодвижущая сила, разность скалярных магнитных потенциалов	ампер	А	А	А
Магнитное сопротивление	ампер на вебер	$\text{с}^2 \cdot \text{А}^2 / (\text{м}^2 \cdot \text{кг}) = \text{А} / \text{Вб} = 1 / \text{Гн}$	А/Вб	А/Вб
Магнитная проводимость	вебер на ампер	$\text{м}^2 \cdot \text{кг} / (\text{с}^2 \cdot \text{А}^2) = \text{Гн}$	Вб/А	Вб/А
Векторный магнитный потенциал	вебер на метр	$\text{кг} \cdot \text{м} / (\text{А} \cdot \text{с}^2) = \text{В} \cdot \text{с} / \text{м}$	Вб/м	Вб/м

## 18.5. Пересчет единиц физических величин

Таблица 18.3

Пересчет единиц энергии

	Дж	кВт·ч	кгс·м	ккал
1 Дж	1	$2,78 \cdot 10^{-7}$	0,102	$2,39 \cdot 10^{-4}$
1 кВт·ч	$3,60 \cdot 10^6$	1	$3,67 \cdot 10^5$	860,0
1 кгс·м	9,81	$2,72 \cdot 10^{-6}$	1	$2,34 \cdot 10^{-8}$
1 ккал	$4,19 \cdot 10^3$	$1,16 \cdot 10^{-3}$	427	1

Таблица 18.4

Пересчет единиц мощности

	Вт	кВт	кгс·м/с	л. с.	ккал/с
1 Вт	1	$10^{-3}$	0,102	$1,36 \cdot 10^{-3}$	$2,39 \cdot 10^{-4}$
1 кгс·м/с	9,81	$9,81 \cdot 10^{-3}$	1	$1,33 \cdot 10^{-3}$	$2,34 \cdot 10^{-3}$
1 л. с.	736	0,736	75	1	0,176
1 ккал/с	$4,19 \cdot 10^3$	4,19	427	5,69	1

Таблица 18.5  
Пересчет единиц момента инерции и махового момента

		Момент инерции, $J$				Момент маховой, $GD^2$	
		кг·м <sup>2</sup>	г·см <sup>2</sup>	кгс·м/с <sup>2</sup>	гс·см/с <sup>2</sup>	кгс·м <sup>2</sup>	тс·м <sup>2</sup>
Мо- мент инер- ции (дина- миче- ский), $J$	1 кг·м <sup>2</sup>	1	10 <sup>2</sup>	0,102	0,102·10 <sup>5</sup>	4	4·10 <sup>-3</sup>
	1 г·см <sup>2</sup>	10 <sup>-7</sup>	1	0,102·10 <sup>-7</sup>	0,102·10 <sup>-2</sup>	4·10 <sup>-7</sup>	4·10 <sup>-10</sup>
	1 кгс·м/ с <sup>2</sup>	9,81	9,81·10 <sup>7</sup>	1	10 <sup>5</sup>	4·9,81	4·9,81·10 <sup>-3</sup>
	1 гс·см/ с <sup>2</sup>	9,81·10 <sup>-5</sup>	9,81·10 <sup>2</sup>	10 <sup>-5</sup>	1	4·9,81·10 <sup>-5</sup>	4·9,81·10 <sup>-8</sup>
Мо- мент махо- вой, $GD^2$	1 кгс·м <sup>2</sup>	1/4	10 <sup>7</sup> /4	0,102/4	0,102·10 <sup>5</sup> /4	1	10 <sup>-3</sup>
	1 тс·м <sup>2</sup>	10 <sup>3</sup> /4	10 <sup>10</sup> /4	0,102·10 <sup>5</sup> /4	0,102·10 <sup>8</sup> /4	10 <sup>3</sup>	1

$$GD^2 = 4gJ; g = 9,81 \text{ м/с}^2.$$

## 18.6. Единицы физических величин, применяемые в отечественной и зарубежной практике

### Единицы измерения длины в других единицах

1 мк (микрон — устар.) = 1 микрометр (мкм) =  $10^{-6}$  м =  $10^{-4}$  см  
 1 нм (миллимикрон — устар.) = 1 нанометр =  $10^{-9}$  м =  $10^{-6}$  мм  
 1 А (ангстрем — до 01.01.1980 г.) =  $10^{-10}$  м =  $10^{-8}$  см (точно)  
 1 м. миля (морская миля, в морской навигации — до срока, который будет установлен) = 1852 м (точно)

### Единицы измерения длины в старых русских мерах

1 линия = 2,54 мм  
 1 дюйм = 10 линиям = 2,54 см  
 1 вершок = 4,44 см  
 1 фут = 12 дюймам = 30,48 см  
 1 аршин = 16 вершкам = 28 дюймам = 71,1 см  
 1 сажень = 3 аршинам = 7 футам = 2,13 м  
 1 верста = 500 саженям = 1,067 км

### Единицы измерения длины в мерах, применяемых в Великобритании и США

- 1 линия (Line) малая = 2,12 мм
- 1 линия большая = 100 мил = 2,54 мм
- 1 дюйм (Inch) = 12 малых линий = 10 больших линий = 2,54 см
- 1 хэнд (Hand) = 4 дюймам = 10,16 см
- 1 фут (Foot) = 3 хэндам = 12 дюймам = 30,48 см
- 1 ярд (Yard) = 3 футам = 91,44 см
- 1 фатом (Fathom) = 2 ярдам = 6 футам = 1,83 м
- 1 род (Rod) = 5,5 ярда = 5,03 м
- 1 миля уставная (Statute mile) = 1760 ярдам = 1,609 км
- 1 миля морская (Mile nautical) = 1,852 км

### Единицы измерения площади в старых русских мерах

- 1 кв. дюйм = 6,45 см<sup>2</sup>
- 1 кв. аршин = 0,5058 м<sup>2</sup>
- 1 кв. сажень = 4,55 м<sup>2</sup>
- 1 десятина = 2400 кв. саженьям = 1,09 га

### Единицы измерения площади в мерах, применяемых в Великобритании и США

- 1 кв. мил = 10<sup>-6</sup> кв. дюйма = 6,45·10<sup>-4</sup> мм<sup>2</sup>
- 1 круг. мил (Circular mil) = 0,785 кв. мил = 5,067·10<sup>-4</sup> мм<sup>2</sup>
- 1 кв. линия (Square line) малая = 4,48 мм<sup>2</sup>
- 1 кв. линия большая = 10<sup>4</sup> кв. миль = 6,45 мм<sup>2</sup>
- 1 кв. дюйм = 144 кв. мал. линиям = 100 кв. бол. линиям = 6,45 см<sup>2</sup>
- 1 кв. фут = 144 кв. дюймам = 929,0 см<sup>2</sup>
- 1 кв. ярд = 9 кв. футам = 8361 см<sup>2</sup>
- 1 кв. фатом = 4 кв. ярдам = 3,34 м<sup>2</sup>
- 1 акр (acre) = 43,560 кв. футам = 4047 м<sup>2</sup>
- 1 кв. миля = 640 акрам = 259 га = 259·10<sup>4</sup> м<sup>2</sup>

### Единицы измерения объема в мерах, применяемых в Великобритании и США

- 1 куб. дюйм (Cubic inch) = 16,4 см<sup>3</sup>
- 1 куб. фут = 1728 куб. дюймам = 28,3 л = 0,0283 м<sup>3</sup>
- 1 куб. ярд = 27 куб. футам = 764,5 л = 0,765 м<sup>3</sup>
- 1 куб. фатом = 8 куб. ярдам = 6,12 м<sup>3</sup>

## Единицы измерения вместимости для сыпучих тел и жидкостей в Великобритании

- 1 пинта (Pint) = 0,568 л
- 1 кварта (Quart) = 2 пинтам = 1,136 л
- 1 галлон (Gallon) = 4 квартам = 4,546 л
- 1 бушель (Bushel) = 8 галлонам = 36,37 л

## Единицы измерения вместимости в США

### *Для сыпучих тел*

- 1 пинта = 0,55 л
- 1 кварта = 1,1 л
- 1 галлон = 4,4 л
- 1 бушель = 35,24 л
- 1 баррель = 115,6 л

### *Для жидкостей*

- 1 пинта = 0,47 л
- 1 кварта = 0,95 л
- 1 галлон = 3,78 л
- 1 баррель = 159 л

## Единицы измерения массы

- 0,1 т = 100 кг (точно)
- 1 кар (карат — для драгоценных камней и жемчуга — до срока, который будет установлен) = 0,2 г (точно)

## Единицы измерения массы в старых русских мерах

- 1 доля = 44,4 мг
- 1 золотник = 96 долям = 4,27 г
- 1 лот = 3 золотникам = 12,8 г
- 1 фунт = 32 лотам = 409,5 г
- 1 пуд = 40 фунтам = 16,381 кг

## Единицы измерения массы в мерах, применяемых в Великобритании

- 1 гран (Grain) = 64,8 мг
- 1 весовое пенни (Penny weight) = 24 гранам = 1,555 г
- 1 тройская унция (Troy ounce) = 20 вес. пенни = 31,10 г
- 1 тройский фунт (Troy pound) = 12 тр. унциям = 373,2 г
- 1 унция (Ounce) = 28,35 г
- 1 фунт (Pound) = 16 унциям = 453,6 г

1 тонна короткая (Short ton) = 907,2 кг

1 тонна длинная (Long ton) = 1016 кг

#### Единицы измерения работы и энергии

1 кал (международная) = 4,1866 Дж

1 лошадиная сила-час (л. с.-ч) =  $2,648 \cdot 10^3$  Дж

1 терт = 29,3 квт. ч =  $105,5 \cdot 10^6$  Дж

#### Единицы измерения мощности

1 килокалорий в час = 1,163 Вт

1 лошадиная сила (л. с.) = 75 кгс м/с = 735,499 Вт

1 л.с. английская = 76,04 кгс м/с = 745,7 Вт

#### Единицы измерения силы

1 дин (дина) =  $10^{-5}$  Н

1 гс (грамм-сила) =  $9,80665 \cdot 10^{-3}$  Н

1 кгс (килограмм-сила) = 9,80665 Н

1 тс (тонна-сила) = 9806,65 Н

#### Единицы измерения давления

1 кгс/см<sup>2</sup> = 98066,5 Па

1 ат (атмосфера техническая) = 1 кгс/см<sup>2</sup> = 98066,5 Па

1 атм (атмосфера физическая) =  $10,1325 \cdot 10^4$  Па

1 бар = 1,02 ат =  $10^5$  Па

1 мм рт. ст. (миллиметр ртутного столба) = 13,595 кгс/м<sup>2</sup> = 133,322 Па

1 мм вод. ст. = 1 кгс/м<sup>2</sup> = 9,80665 Па

#### Единицы измерения скорости

1 км/ч = 0,278 м/с

1 уз. (узел) = 1 морской миле в час = 1,852 км/ч = 0,514 м/с

#### Единицы измерения электрических величин

10м мм<sup>2</sup>/м =  $10^{-6}$  Ом м

1 Мкс (максвелл) =  $10^{-8}$  Вб

1 Гс (гаусс) =  $10^{-4}$  Тл

1 Гб (гильберт) =  $(10/4\pi)$  А

1 Э (эрстед) =  $(10^3/4\pi)$  А/м

1 эрг (эрг) =  $1 \cdot 10^{-7}$  Дж

## 18.7. Физические константы, используемые в электротехнике

Элементарный заряд (заряд электрона)

$$e = 1,6021892 \cdot 10^{-19} \text{ Кл.}$$

Электрическая постоянная

$$\epsilon_0 = 1/\mu_0 C_0 = 8,85418782 \cdot 10^{12} \text{ Ф/м} \approx \text{Ф/м},$$

где  $C_0 = 299792458 \text{ м/с}$  — скорость света в вакууме.

Магнитная постоянная

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м} = 4\pi \cdot 10^9 \text{ Гн/см.}$$

Гравитационная постоянная

$$G = 6,6720 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/(\text{кг} \cdot \text{с}^2) = 6,6720 \cdot 10^{-11} \text{ Нм}^2/\text{кг}^2.$$

Нормальное ускорение

$$g_n = 9,80665 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}.$$

Постоянная Планка

$$h = 6,626176 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с.}$$

Постоянная Больцмана

$$k = R/N_a = 1,380662 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К.}$$

Универсальная газовая постоянная

$$R = pV/T = 8,31441 \text{ Дж/(К} \cdot \text{моль)},$$

где  $p$  — давление в Па;

$V$  — нормальный объем в  $\text{м}^3$ .

Температурный коэффициент объемного расширения идеальных газов

$$\alpha = 0,00366 \text{ К}^{-1}.$$

Число Авогадро

$$N_a = 6,022045 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}.$$

Число Фарадея

$$F = N_a e = 96484,56 \text{ Кл/моль}.$$

## 18.8. Буквы латинского и греческого алфавита, принятые для обозначения электрических и магнитных величин

### Буквы латинского алфавита

- A — плотность тока линейная; потенциал магнитный векторный
- B — индукция магнитная
- B, b — проводимость реактивная
- C — емкость
- c — скорость распространения электромагнитных волн ( $c_0$  — в вакууме)
- D — смещение электрическое
- E — напряженность электрического поля
- E, e — электродвижущая сила (ЭДС)
- F — магнитодвижущая сила
- f — частота колебаний ( $f_0$  — резонансная)
- G, g — проводимость активная
- H — напряженность магнитного поля; передаточная функция
- I, i — ток
- J — плотность тока; момент инерции
- k — коэффициент связи
- L — индуктивность собственная
- M — индуктивность взаимная; намагниченность; вращающий момент двигателя
- m — магнитный момент; число фаз многофазной системы цепей
- N — число витков; коэффициент размагничивания
- n — коэффициент трансформации; отношение чисел витков
- P — мощность; мощность активная; поляризованность
- p — момент электрический; мощность удельная; число пар полюсов
- Q — мощность реактивная; добротность; количество теплоты

$Q, q$  — заряд  
 $R, r$  — сопротивление электрическое; сопротивление активное  
 $S$  — мощность полная; сечение проводников  
 $T$  — период колебаний  
 $U, u$  — напряжение  
 $W$  — энергия электромагнитная  
 $w$  — число витков; энергия электромагнитная удельная  
 $X, x$  — сопротивление реактивное  
 $Y, y$  — проводимость полная  
 $Z, z$  — сопротивление полное

### Буквы греческого алфавита

$A$  — постоянная ослабления  
 $\alpha$  — коэффициент ослабления  
 $B$  — постоянная фазы  
 $\beta$  — коэффициент фазы  
 $\Gamma$  — постоянная передачи  
 $\Upsilon$  — коэффициент распространения; проводимость электрическая удельная  
 $\delta$  — коэффициент затухания; угол потерь  
 $\epsilon$  — проницаемость диэлектрическая ( $\epsilon_0$  — электрическая постоянная)  
 $\theta$  — декремент колебаний логарифмический  
 $\kappa$  — восприимчивость магнитная  
 $\lambda$  — длина электромагнитной волны; коэффициент мощности  
 $\mu$  — проницаемость магнитная ( $\mu_0$  — магнитная постоянная)  
 $\Pi$  — вектор Пойнтинга  
 $\rho$  — коэффициент отражения; плотность электрического заряда объемная; сопротивление электрическое удельное  
 $\sigma$  — плотность электрического заряда поверхностная; проводимость электрическая удельная  
 $\tau$  — плотность электрического заряда линейная; постоянная времени  
 $\Phi$  — магнитный поток  
 $\phi$  — потенциал электрический; сдвиг фаз между напряжением и током  
 $\chi$  — восприимчивость диэлектрическая  
 $\Psi$  — потокоцепление  
 $\Omega, \omega$  — частота колебаний угловая; частота вращения угловая

## Примеры применения индексов

$\epsilon_a$  — абсолютная диэлектрическая проницаемость

$Z_{\text{в}}$  — волновое сопротивление

$r_{\text{вн}}$  — внутреннее сопротивление

$Z_c$  — характеристическое сопротивление

$U_{\text{вх}}$  — входное напряжение

$U_{\text{вых}}$  — выходное напряжение

$L_{\text{диф}}$  — индуктивность дифференциальная

$r_k$  — сопротивление короткого замыкания

$W_M$  — энергия магнитная

$I_M$  — амплитуда тока

$I_{\text{max}}$  — максимальное значение тока

$I_{\text{min}}$  — минимальное значение тока

$\mu_r$  — относительная магнитная проницаемость

$I_{\Sigma}$  — суммарный ток

$U_{\phi}$  — фазное напряжение

$r_x$  — сопротивление холостого хода

$a_0 = a/a_0$  — отнесенная к базисному значению ( $a_0$ ) величина

**Примечание.** Прописными буквами обозначают, как правило, установившиеся значения тока, напряжения, мощности; строчными буквами обозначают мгновенные или неустановившиеся значения этих величин.

### **Раздел 3**

## **Электротехнические материалы и изделия**

## 19. ПРОВОДНИКОВЫЕ МАТЕРИАЛЫ И ИХ ХАРАКТЕРИСТИКИ

### 19.1. Классификация и свойства проводниковых материалов

В качестве проводниковых материалов в электротехнике используются металлы и их сплавы, обладающие хорошей электрической проводимостью. Прежде всего это медь и алюминий. Применяются для этой цели и другие металлы: серебро, золото, свинец, сталь, а также различные сплавы на основе меди, чаще всего бронза и латунь.

Чистые металлы обладают малым удельным сопротивлением, которое находится в пределах  $0,0150 \dots 0,105$  мкОм·м. Сплавы имеют более высокие значения удельного сопротивления в пределах  $0,30 \dots 1,8$  мкОм·м.

Многие металлы обладают наряду с малым удельным сопротивлением хорошей пластичностью, т. е. могут вытягиваться в тонкую проволоку диаметром до  $0,01$  мм и прокатываться в фольгу толщиной менее  $0,01$  мм. Сплавы могут иметь большую механическую прочность, обладают меньшей пластичностью по сравнению с чистыми металлами, они более упруги.

Все металлические проводниковые материалы обладают электронной электропроводностью. Удельное сопротивление всех металлических проводников увеличивается с ростом температуры, а также в результате механической обработки, вызывающей остаточную деформацию в металле.

Холодная обработка металлов (прокатка, волочение) позволяет получить проводниковые изделия с повышенным пределом прочности при растяжении, например при изготовлении проводов воздушных линий, троллейных проводов и т. д. Чтобы вернуть деформированным металлическим проводникам прежнюю величину удельного сопротивления, их подвергают термической обработке — отжигу без доступа кислорода.

*Серебро* — металл серебристо-белого цвета, обладает наилучшей среди всех металлов электропроводностью, прекрасно поддается механической обработке. Широкое применение се-

ребра в электротехнике ограничено его очень высокой стоимостью.

**Медь** — металл красного цвета, розовый в изломе, обладает лучшей после серебра электропроводностью. Расширение диапазона и объемов применения меди ограничено ее высокой стоимостью.

**Алюминий** — металл серебристо-белого цвета, втрое легче меди. Его электропроводность в полтора раза ниже, чем у меди. Алюминий значительно дешевле меди, чем и обусловлено его весьма широкое применение.

**Свинец** используют в качестве защитных герметизирующих оболочек кабелей, для изготовления вставок предохранителей, пластин аккумуляторов.

**Сталь** используется для изготовления сталеалюминиевых проводов, стальных защитных оболочек кабелей в виде лент, проволоки, гофрированных оболочек. Кроме того, полосы, пруты, уголки и иной стальной прокат используется для устройства заземлений электроустановок, троллей и т. д.

**Вольфрам** обладает самой высокой из всех используемых в электротехнике металлов плотностью ( $19000 \text{ кг/м}^3$ ). Электропроводность вольфрама вдвое превышает электропроводность стали. Использование вольфрама в электротехнике ограничено изготовлением спиралей для электрических ламп, контактов для некоторых электрических аппаратов.

Для изготовления проводов и лент с высоким электрическим сопротивлением используются сплавы различных металлов: алюмель, константан, копель, манганин, нейзильбер, нихром.

**Алюмель** — сплав никеля (основа) с алюминием, марганцем, кремнием (до 6%).

**Константан** — сплав меди (основа) с никелем (до 40%) и марганцем (1,5%).

**Копель** — сплав меди (основа) с никелем (до 43%) и марганцем (до 0,5%).

**Манганин** — сплав меди (основа) с марганцем (11...13,5%) и никелем (2,5...3,5%).

**Нейзильбер** — сплав меди (основа) с никелем (5...35%) и цинком (13...45%).

**Нихром** — сплавы никеля, хрома и железа, легируемые кремнием (до 1,5%), алюминием (до 3,5%). Нихром отличается высокой жаропрочностью (до  $1200^\circ\text{C}$ ).

**Олово** и его сплавы используются главным образом для лужения и пайки металлических жил проводов и кабелей, а также в качестве примеси для получения сплавов на основе меди.

Физические свойства некоторых металлов и сплавов и области их применения приведены в табл. 19.1.

Таблица 19.1

## Физические свойства проводниковых металлов и сплавов

Материал	Плотность, кг/м <sup>3</sup>	Предел прочности при растяже- нии, МПа	Температу- ра плавлени- я, °С	Удельное элек- трическое сопро- тивление при 20 °С, мкОм·м	Удельная проводимос- ть при 20 °С, МСм/м	Температур- ный коэффи- циент сопро- тивления при 20 °С, 10 <sup>-4</sup> °С <sup>-1</sup>	Температурный коэффициент линейного рас- ширения, 10 <sup>-6</sup> °С <sup>-1</sup>	Область применения в электротехнике, изделия
Алюминий	2703	75...180	657...660	0,0280... 0,0295	38...34	40...43,2	24	Провода, шины, кабели и их защитные обо- лочки
Медь	8940	256...409	1083	0,01724... 0,0180	58...55,5	41,1...43	1,7	Провода, шины, кабе- ли, контакты, платы
Сталь	7870	700...1750	1400...1530	0,103...0,137	9,7...7,3	57...62	11	Шины, контуры зазем- ления
Серебро	10500	150...300	960,5	0,015...0,0162	66...62	34...38	19	Контакты, фольга и провода
Свинец	11350	9,8...16	327,4	0,217...0,227	4,6...4,4	38...41	29	Пластины аккумулято- ров, защитные покры- тия кабелей
Вольфрам	19300	2000...4000	3370...3400	0,053...0,055	19...18	41...50	4,3	Спиральи ламп, контак- тов
Олово	7310	—	232,0	0,120	8,33	44	23,0	Сплавы, припои
Цинк	7140	110...290	420	0,059	16,94	—	31,0	Сплавы, покрытия, электроды
Золото	19300	130...150	1063	0,024	41,6	38	14,0	Сплавы, контакты

Окончание табл. 19.1

Материал	Плотность, кг/м³	Предел прочности при растяже- нии, МПа	Температу- ра плавлени- я, °С	Удельное элек- трическое сопро- тивление при 20 °С, мкОм·м	Удельная проводимос- ть при 20 °С, МСм/м	Температур- ный коэффи- циент сопро- тивления при 20 °С, 10⁻⁴ °С⁻¹	Температурный коэффициент линейного рас- ширения, 10⁻⁶ °С⁻¹	Область применения в электротехнике, изделия
Никель	8900	600...700	1455	0,073	13,69	65	13,0	Сплавы, постоянные магниты
Кобальт	8710		1492	0,062	16,12	60	12,0	Сплавы, постоянные магниты
Хром	7100		1850	0,210	4,76	—	6,5	Сплавы, постоянные магниты
Платина	21400		1770	0,105	9,52	—	9,0	Сплавы, проволока
Молибден	10200	800...2500	2620	0,057	17,54	38	6,5	Контакты, зажимы
Латунь	8500...8600	230...850	880...1070	0,43...0,108	2,2...9,2	10...27	17...20	Провода, пружины,
Бронза	8230...8900	520...1350	955...1050	0,095...0,1	10,5...10	4,9...18	16...18	контакты

## 19.2. Медь и проводниковые материалы на ее основе

Медь — металл красного цвета, розовый в изломе, обладает лучшей после серебра электропроводностью. Плотность меди 8890...8940 кг/м<sup>3</sup>, предел прочности при растяжении 256...409 МПа, температура плавления 1083 °С. Удельное электрическое сопротивление меди при 20 °С находится в пределах 0,01724...0,0180 мкОм·м, удельная проводимость при 20 °С в пределах 58...55,5 МСм/м.

Для изготовления проводников применяют электролитическую (катодную) медь. Медь применяется для изготовления эмалированных и других проводов, кабелей, шин распределительных устройств, анодов при гальванических покрытиях.

Промышленностью выпускается медь марок МВЧк, М1у, М1, М0б, М1б, М00б, М00к, М0к, М1р, М1ф, М2р, М3р, М2 и М3. Расшифровываются обозначения следующим образом: М — медь, к — катодная, б — бескислородная, р — раскисленная, у — уточнение всех примесей, ф — ужесточение содержания фосфора, ВЧ — высокая чистота меди.

Удельное электрическое сопротивление отожженной проволоки из меди марок М0б, М1б и М1, предназначенных для электротехнических целей, при 20 °С не превышает 0,01724 мкОм·м (17,24·10<sup>-9</sup> Ом·м). Соответственно, удельная электрическая проводимость меди составляет не менее 58 МСм/м.

Механические свойства меди зависят от ее структуры после термической обработки. Твердотянутая медь после протяжки в холодном состоянии обладает более высокой механической прочностью, чем мягкая (отожженная) медь. Относительное удлинение при растяжении отожженной меди в пределах 18...50%.

Сведения об основных механических свойствах меди приведены в табл. 19.2 [19].

Таблица 19.2  
Основные механические свойства меди

Марка меди	Плотность, кг/м	Предел прочности при растяжении, Па (кг·с/мм <sup>2</sup> )	Температура плавления, °С	Относительное удлинение при растяжении, %
ММ (мягкая отожженная)	8900	250...300 (25...30)	1083	18...50
МТ (твердая неотожженная)	8960	340...480 (34...48)	1080	0,5...4

### 19.2.1. Медные слитки

Промышленность выпускает медь-полуфабрикат в виде слитков (ГОСТ 193-79), которые затем подвергаются соответствующей обработке. Различают медные слитки следующих марок: СВ — вертикальной непрерывной отливки; СН — горизонтальной отливки с неудаленным слоем верхней поверхности; СС — горизонтальной отливки с удаленным слоем верхней поверхности; СП — горизонтальной отливки, плоские с неудаленным слоем верхней поверхности. Обозначение слитка включает его размеры в мм и марку, а также ГОСТ. Например, СВ 90х90-1400 М06 ГОСТ 193-79.

### 19.2.2. Листы и полосы

Листы и полосы из холодно- и горячекатаной меди марок М1, М1р М2, М2р, М3 и М3р выпускаются в соответствии с ГОСТ 495-77, который регламентирует их размеры, толщину и предельное отклонение по толщине листов. Листы из холоднокатаной меди имеют размеры от 600х2000 мм до 1000х2000 мм, толщину от 0,4 до 12 мм. Полосы имеют толщину от 0,4 до 6,0 мм и ширину от 40 до 600 мм.

Условные обозначения для листов и полос учитывают вид и точность обработки, мягкость—твердость меди, длину: холоднокатаная — Д; горячекатаная — Г; прямоугольного сечения — ПР; нормальной точности — Н; повышенной точности — П; мягкие — М; твердые Т; немерной длины НД; краткой длины КД. Например: лист ДПРНХ 6х600х1,5 М1р означает лист холоднокатаного прямоугольного сечения, нормальной точности изготовления толщиной 6 мм, шириной 600 мм, длиной 1500 мм из меди марки М1р.

В табл. 19.3 приведены данные о толщине, ширине, длине и предельных отклонениях по толщине холоднокатаных медных листов.

Таблица 19.3

Толщина, ширина, длина и предельные отклонения по толщине холоднокатаных медных листов

Толщина, мм	Предельное отклонение по толщине листов, мм, размером, мм		
	600х2000, 600х1500	800х2000, 710х1400	1000х2000
0,4; 0,5	-0,08	-0,09	—
0,6; 0,7	-0,08	-0,10	—
0,8	-0,08	-0,10	-0,15

Толщина, мм	Предельное отклонение по толщине листов, мм, размером, мм		
	600x2000, 600x1500	800x2000, 710x1400	1000x2000
0,9; 1,0; 1,1	-0,10	-0,12	-0,17
1,2; 1,3; 1,4	-0,12	-0,14	-0,18
1,5; 1,6; 1,8	-0,14	-0,16	-0,20
2,0; 2,2	-0,16	-0,18	-0,22
2,6; 3,0	-0,18	-0,21	-0,24
3,5	-0,20	-0,24	-0,28
4,0	-0,22	-0,24	-0,30
4,5	-0,24	-0,27	-0,32
5,0; 5,5	-0,26	-0,30	-0,34
6,0; 6,5	-0,26	-0,34	-0,36
7,0; 8,0	-0,28, -0,30	-0,37	-0,45
9,0; 10,0	-0,32, -0,36	-0,40	-0,60
11,0; 12,0	-0,40, -0,44	-0,50	-0,60, -0,70

### 19.2.3. Катанка медная

Катанка медная изготавливается в соответствии с ГОСТ 13842-74. Катанка различается способом ее изготовления и в соответствии с ним маркируется. Катанка изготавливается из медных слитков типов СВ-I, СВ-II, СС-I, СС-II, СН-I и СН-II по ГОСТ 193-67, а СВ-IA, СС-IA, СН-IA — методом непрерывного литья и прокатки из катодной меди на соответствующих установках.

Имеются следующие марки медной катанки:

МК-ЛПС — катанка медная, полученная методом непрерывного литья и прокатки, светлая, не требующая последующего травления;

МК-ЛП — катанка медная, полученная методом непрерывного литья и прокатки;

МК-СВ — катанка медная из слитков типа СВ-I или СВ-II вертикальной отливки;

МК-СС — катанка медная из строганных слитков типа СС-I или СС-II горизонтальной отливки;

МК-СН — катанка медная из нестроганных слитков СН-I или СН-II горизонтальной отливки.

Пример условного обозначения медной катанки, изготовленной из слитков типа СВ, диаметром 8 мм: катанка МК-СВ-8 ГОСТ 13842-74.

Диаметры медной катанки и предельные отклонения от них представлены в табл. 19.4.

Таблица 19.4

Диаметр медной катанки и предельное отклонение от него

МК-СВ, МК-СС, МК-СН		МК-ЛП, МК-ЛПС		
Диаметр, мм	Предельное отклонение, мм	Диаметр, мм	Предельное отклонение, мм (МК-ЛП)	Предельное отклонение, мм (МК-ЛПС)
6; 7; 7,2	$\pm 0,3$	7,2; 8	$\pm 0,30$	$\pm 0,20$
8	$+0,3; -0,4$	9	$\pm 0,35$	$\pm 0,20$
9	$\pm 0,4$	10; 11,3; 12	$\pm 0,50$	$\pm 0,30$
10	$\pm 0,5$	14,2	$\pm 0,60$	$\pm 0,40$
12; 13; 14; 16	$\pm 0,6$	17,8; 22,5	$\pm 0,70$	$\pm 0,50$
17,5; 18	$\pm 0,8$	—	—	—
20; 22	$\pm 1,0$	—	—	—

Относительное удлинение катанки составляет не менее 30% при диаметре до 10 мм, 35% при диаметре свыше 10 мм.

Удельное сопротивление постоянному току отожженной проволоки, протянутой из катанки, отнесенное к 1 м длины и 1 мм<sup>2</sup> поперечного сечения, должно составлять не более 0,01724 мОм·м. Удельное сопротивление постоянному току контактного провода, изготовленного из катанки марки МК-ЛПС диаметром 14,2...22,5 мм, отнесенное к 1 м длины и 1 мм<sup>2</sup> поперечного сечения, должно составлять не более 0,0177 мОм·м.

#### 19.2.4. Проволока медная круглая

Проволока медная электролитическая в соответствии с ГОСТ 2212-79 изготавливается следующих марок: ММ — медная мягкая, МТ — медная твердая, МС — медная для воздушных линий связи.

Номинальные диаметры медной проволоки и предельные отклонения от них приведены в табл. 19.5.

Удельное электрическое сопротивление медной проволоки постоянному току при  $\pm 20$  °С соответствует указанному в табл. 19.6.

Таблица 19.5

**Номинальные диаметры медной проволоки  
и предельные отклонения от них**

Номинальный диаметр, мм	Предельное отклонение, мм	Номинальный диаметр, мм	Предельное отклонение, мм	Номинальный диаметр, мм	Предельное отклонение, мм
0,020	±0,002	0,630	±0,010	2,50	±0,02
0,025		0,640		2,51*	
0,030		0,670		2,52	
0,032		0,680		2,59	
0,035*		0,690*		2,61*	
0,040		0,710		2,63*	
0,045*		0,750		2,65	
0,050		0,770*		2,73	
0,060	±0,003	0,800	±0,015	2,76	±0,03
0,063		0,830*		2,80	
0,071		0,850		2,83*	
0,080		0,800		2,84	
0,080		0,930*		2,85	
0,100		0,950		2,95	
0,112		0,970		3,00	
0,120		1,00		3,02-	
0,125		1,04		3,05*	
0,130		1,06		3,15	
0,132		1,08*		3,20	
0,140		1,10		3,27	
0,150		1,12		3,28*	
0,160		1,13		3,30	
0,170		1,18		3,34	
0,180		1,20		3,35	
0,190		1,26		3,36*	
0,200		1,30		3,45	
				3,53*	
0,210	±0,005	1,32	±0,02	3,55	
0,224		1,35		3,57	
0,230		1,38		3,61	
0,236		1,40		3,66	
0,250		1,45*		3,67*	
0,260		1,50		3,72*	

Окончание табл. 19.5

Номинальный диаметр, мм	Предельное отклонение, мм	Номинальный диаметр, мм	Предельное отклонение, мм	Номинальный диаметр, мм	Предельное отклонение, мм	
0,265	±0,005	1,53	±0,02	3,75	±0,03	
0,280		1,56*		3,80		
0,300		1,60		3,81*		
0,315	±0,007	1,62*		4,00	±0,04	
0,320		1,68*		4,10		
0,335		1,70		4,11*		
0,350*		1,74*		4,15		
0,355		1,78		4,23		
0,370		1,80		4,25		
0,380		1,81*		4,50		
0,400		1,88*		4,75		
0,420*	±0,010	1,90		4,80	±0,05	
0,425		1,95*		5,00		
0,450		2,00				
0,475		2,02*				
0,490		2,03				
0,500		2,10*				
0,520*		2,12		6,00	±0,06	
0,530		2,13*		6,60		
0,560		2,14		8,00		
0,580		2,24				
0,600		2,25				
		2,36		9,42		

\* В новых изделиях применять не рекомендуется.

Таблица 19.6

Удельное электрическое сопротивление медной проволоки  
постоянному току

Номинальный диаметр проволоки, мм	Удельное электрическое сопротивление, Ом·м, не более	
	Марка ММ	Марки МТ и МС
До 1	0,01724	0,0180
От 1 до 2,44		0,0178
2,5 и более		0,0177

Сопротивление меди, как и других металлов, зависит от температуры и определяется температурным коэффициентом сопротивления. Для определения коэффициента изменения сопротивления можно воспользоваться табл. 19.7. В таблице вертикальный столбец соответствует температуре в десятках градусов, а верхняя горизонтальная строка — в единицах градусов. Изменение сопротивления меди при 15 °С принято за единицу. Коэффициент для произвольной температуры соответствует пересечению соответствующих строки и столбца. Например, изменение сопротивления меди при 86 °С составляет 1,2284. Это означает, что сопротивление проводника, измеренное при 15 °С, работающего при температуре 86 °С, надо умножить на 1,2284.

Таблица 19.7

Изменение сопротивления медных проводов при нагревании

Тем- пера- тура, °С	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,940	0,944	0,948	0,952	0,956	0,960	0,964	0,968	0,972	0,976
10	0,980	0,984	0,988	0,992	0,996	1,000	1,004	1,008	1,012	1,016
20	1,020	1,024	1,028	1,032	1,036	1,040	1,044	1,048	1,052	1,056
30	1,060	1,064	1,068	1,072	1,076	1,080	1,084	1,088	1,092	1,096
40	1,100	1,104	1,108	1,112	1,116	1,120	1,124	1,128	1,132	1,136
50	1,140	1,144	1,148	1,152	1,156	1,160	1,164	1,168	1,172	1,176
60	1,180	1,184	1,188	1,192	1,196	1,200	1,204	1,208	1,212	1,216
70	1,220	1,224	1,228	1,232	1,236	1,240	1,244	1,248	1,252	1,256
80	1,260	1,264	1,268	1,272	1,276	1,280	1,284	1,288	1,292	1,296
90	1,300	1,304	1,308	1,312	1,316	1,320	1,324	1,328	1,332	1,336
100	1,340	1,344	1,348	1,352	1,356	1,360	1,364	1,368	1,372	1,376

### 19.2.5. Проволока прямоугольного сечения, ленты и шины медные для электротехнических целей

Медные проволока, ленты и шины изготавливаются следующих марок: ПММ — проволока медная мягкая; ПМТ — проволока медная твердая; ЛММ — лента медная мягкая; ЛМТ — лента медная твердая; ШММ — шина медная мягкая; ШМТ — шина медная твердая; ШМТВ — шина медная твердая из бескислородной меди.

Проволока медная прямоугольного сечения. Толщину прямоугольной проволоки обозначают буквой *a*, мм, ширину — буквой *b*, мм. Минимальная толщина проволоки 0,8 мм, максимальная — 8 мм. Минимальная ширина проволоки — 2 мм, максимальная — 30 мм. Номинальные размеры прямоугольных проволок следующие:

*a* — толщина, мм: 0,8; 0,85; 0,9; 1,06; 1,12; 1,18; 1,25; 1,32; 1,4; 1,5; 1,6; 1,7; 1,8; 1,9; 2; 2,12; 2,24; 2,36; 2,5; 2,65; 2,8; 3; 3,15; 3,35; 3,65; 3,75; 4; 4,25; 4,5; 4,75; 5; 5,3; 5,6; 6; 7; 8;

*b* — ширина, мм: 2; 2,12; 2,24; 2,36; 2,5; 2,65; 2,8; 3; 3,15; 3,35; 3,55; 3,75; 4; 4,25; 4,4; 4,5; 4,75; 5; 5,3; 5,6; 6; 6,3; 6,7; 6,9; 7,1; 7,5; 8; 8,5; 8,6; 9; 9,5; 10; 10,6; 11,2; 11,8; 12,5; 13,2; 14; 15; 16; 20; 22; 25; 26; 3; 28; 30.

Пример условного обозначения проволоки медной мягкой размером 0,80 х 2,00 мм: ПММ 0,80 х 2,00 ГОСТ 434-78.

Ленты медные. Таким же образом обозначаются размеры медных лент. Толщину прямоугольной ленты обозначают буквой *a*, мм, ширину буквой *b*, мм. Минимальная толщина ленты 0,1 мм, максимальная — 1,81 мм. Минимальная ширина ленты 8 мм, максимальная — 35 мм. Номинальные размеры медных лент следующие:

*a* — толщина, мм: 0,1; 0,15; 0,2; 0,25; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1; 1,08; 1,16; 1,25; 1,35; 1,45; 1,5; 1,56; 1,68; 1,81; 1,95; 2; 2,1; 2,26; 2,44; 2,5; 2,63; 2,85; 3; 3,28; 3,58;

*b* — ширина, мм: 8; 8,6; 9,3; 10,8; 11,6; 12,5; 13,5; 14; 14,5; 15,6; 16; 16,8; 18; 19,5; 20; 22; 25; 26,3; 28; 30; 32; 35; 40; 45; 47; 50; 55; 60; 65; 70; 75; 80; 90; 100.

Шины медные. Номинальные размеры шин соответствуют:

*a* — толщина, мм: 4; 4,5; 5; 5,5; 6; 6,5; 7; 7,5; 8; 9; 10; 11; 12,5; 14; 16; 18; 20; 25; 30;

*b* — ширина, мм: 16; 20; 25; 30; 32; 35; 40; 45; 50; 55; 60; 65; 70; 75; 80; 90; 100; 120.

Длина полосы шины составляет от 3 до 6 м.

Пример обозначения шины медной мягкой размером 8,00х40,00: ШММ 8,0х40,00.

### 19.2.6. Трубы медные

Медные трубы для токопроводящих изделий изготавливаются из меди марок М1 и М2. Тянутые и холоднокатанные трубы имеют наружный диаметр от  $3 \pm 0,15$  до  $360 \pm 0,9$  мм и соответственно толщину стенки от  $0,5 \pm 0,07$  до  $10 \pm 0,75$  мм. Прессованные трубы имеют наружный диаметр от  $30 \pm 0,35$  до  $280 \pm 2,8$  мм и соответственно толщину стенки от  $5 \pm 0,5$  до  $30 \pm 2,4$  мм.

Трубы немерной длины тянутые и холоднокатанные имеют длину от 1,5 до 6 м; прессованные от 1 до 6 м, мерной длины или кратной ей — тянутые, холоднокатанные и прессованные — в пределах установленных длин. Тянутые трубы в бухтах изготавливаются мерной и немерной длины, не менее 10 м длины, наружным диаметром до 18 мм и толщиной стенки до 2,5 мм включительно.

Тянутые и холоднокатанные трубы изготавливаются: мягкими (отожженными) марки М; полутвердыми марки ПТ; твердыми марки Т.

### 19.2.7. Фольга медная электролитическая

Медная фольга выпускается следующих марок: ФМЭ — фольга медная электролитическая неоксидированная; ФМЭО — фольга медная электролитическая оксидированная нормальной шероховатости; ФМЭОШ — фольга медная электролитическая оксидированная повышенной шероховатости. Фольга марок ФМЭО и ФМЭОШ изготавливается из фольги марки ФМЭ.

Пример условного обозначения фольги медной электролитической оксидированной, рулонной толщиной 0,035 мм, шириной 1100 мм: фольга ФМЭО — 0,035x1100.

Электрическое сопротивление фольги, отнесенное к 1 мм<sup>2</sup> сечения и 1 км длины, при 20 °С не превышает 30 Ом.

Номинальные размеры рулонной и листовой фольги и предельные отклонения по ним приведены в табл. 19.8.

Таблица 19.8

Номинальные размеры рулонной и листовой фольги,  
предельные отклонения и масса

Марка фольги	Фольга рулонная				Фольга листовая		Масса 1 м <sup>2</sup> , г	
	d, мм	Δd, мм	b, мм	Δb, мм	Размер, мм	Δ, мм	m	Δm
ФМЭ	0,035	±0,003	500; 550 1000; 1100	±5	550x750 550x710	±5	305	±27
	0,050	+0,005; -0,007	500; 550 1000; 1100		550x750 555x710		435	+43 -60
ФМЭО	0,035	±0,003	500; 550 1000; 1000	±5	550x750 550x710	±5	305	±27
	0,050	+0,005; -0,007	500; 550 1000; 1100		550x750 550x710		435	+43 -60
ФМЭОШ	0,050	+0,005; -0,007	500; 550 1000; 1100	±5	550x750 550x710	±5	435	+43 -60

В табл. 19.8 приняты следующие обозначения:  $d$  — номинальная толщина фольги,  $\Delta d$  — предельное отклонение толщины,  $b$  — номинальная ширина рулона,  $\Delta b$  — предельное отклонение ширины,  $\Delta$  — предельное отклонение размеров,  $\Delta m$  — предельное отклонение массы.

Медная фольга имеет одну гладкую поверхность, другую шероховатую. Шероховатая поверхность фольги марок ФМЭ и ФМЭО имеет высоту неровностей в пределах 3...8 мкм, марки ФМЭОШ в пределах 5...8 мкм.

Толщина оксидированного слоя на фольге марок ФМЭО и ФМЭОШ находится в пределах 0,15...0,35 мкм.

### 19.2.8. Наконечники медные

Медные наконечники марок Т и П предназначены для закрепления опрессовкой (марка Т) и пайкой (марка П) концов проводов и кабелей с медными жилами сечением от 4 до 240 мм<sup>2</sup> на напряжение до 35 кВ (рис. 19.1, а и б). Наконечники марки Т изготавливаются из медных труб соответствующего диаметра, марки П — из полосовой меди.

Наконечники могут использоваться при температуре окружающей среды от минус 10 до плюс 45 °С, при относительной влажности 90% при 27 °С.

Технические данные медных наконечников марки Т приведены в табл. 19.9, наконечников марки П — в табл. 19.10.

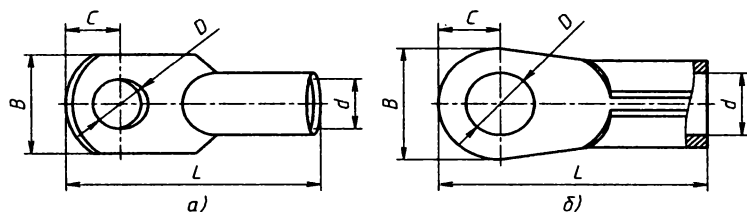


Рис. 19.1. Наконечники медные (а) серии Т и (б) серии П

Таблица 19.9  
Наконечники медные марки Т

Марка	Сечение провода, мм <sup>2</sup>	$D$ , мм	$d$ , мм	$L$ , мм	$C$ , мм	$B$ , мм	Масса 100 шт., кг
Т4-5-3-М	4	5,3	3,0	32,0	7,0	10,0	0,34

Окончание табл. 19.9

Марка	Сечение провода, мм <sup>2</sup>	D, мм	d, мм	L, мм	C, мм	B, мм	Масса 100 шт., кг
T6-5-4-M	6	5,3	4,0	32,0	7,0	10,0	0,39
T10-6-5-M	10	6,4	5,0	40,0	8,5	14,0	0,98
T16-6-6-M	16	6,4	6,0	40,0	8,5	14,0	1,16
T25-8-8-M	25	8,4	8,0	50,0	11,0	16,0	1,79
T35-8-10-M	35	8,4	10,0	63,0	11,0	20,0	2,78
T50-10-11-M	50	10,5	11,0	63,0	12,5	22,0	3,00
T70-10-13-M	70	10,5	13,0	65,0	12,5	24,0	3,74
T95-12-15-M	95	13,0	15,0	75,0	13,5	28,0	6,54
T120-12-17-M	120	13,0	17,0	81,0	13,5	34,0	10,45
T150-16-19-M	150	17,0	19,0	90,0	16,0	36,0	15,38
T185-16-21-M	185	17,0	21,0	95,0	16,0	40,0	18,10
T240-16-24-M	240	17,0	24,0	105,0	16,0	48,0	27,26

Таблица 19.10

## Наконечники медные марки П

Марка	Сечение провода, мм <sup>2</sup>	D, мм	d, мм	L, мм	C, мм	B, мм	Масса 100 шт., кг
П 2,5-4-M	2,5	4,3	2,8	17,0	3,0	8,0	0,09
П 6-4-M	6	4,3	4,2	18,0	4,0	8,0	0,16
П 10-5-M	10	5,3	5,3	23,0	5,0	10,0	0,30
П 16-6-M	16	6,4	6,3	29,0	6,0	12,0	0,48
П 25-6-M	25	6,4	8,0	34,0	7,0	15,0	1,25
П 35-8-M	35	8,4	9,0	46,0	10,0	20,0	1,98
П 50-8-M	50	8,4	10,0	46,0	10,0	20,0	2,73
П 70-10-M	70	10,5	13,0	52,0	12,0	25,0	4,37
П 95-10-M	95	10,5	15,0	56,0	12,0	25,0	7,58
П 120-10-M	120	10,5	16,0	56,0	12,0	25,0	9,68
П 150-12-M	150	13,0	18,0	66,0	13,0	30,0	14,42
П 185-12-M	185	13,0	20,0	72,0	15,0	30,0	20,89
П 240-16-M	240	17,0	24,0	86,0	18,0	40,0	29,62

## 19.3. Сплавы на основе меди

### 19.3.1. Латунь

Латунями называют медно-цинковые сплавы. Латунь обозначается буквой Л и набором цифр и букв. Две цифры, стоящие за буквой Л, обозначают процент содержания меди, например Л80 означает латунь, содержащую 80% меди и 20% цинка. В соответствующих марках латуни вводятся примеси никеля, олова, кремния, алюминия, марганца и других элементов, однако их содержание не превышает единиц или долей процента. В ряде случаев в марке латуни указывается содержание примеси, например в латуни марки ЛМц58-2 содержание марганца устанавливается в пределах 2%.

Удельное сопротивление латуни в зависимости от марки находится в пределах 0,43...0,108 мкОм·м при 20 °С. Удельная проводимость при 20 °С в пределах 2,2...9,2 МСм/м.

В табл. 19.11 приведены некоторые марки латуни и их свойства [19].

Таблица 19.11  
Некоторые марки латуни и их свойства

Марка	Свойства и области применения
Л98, Л90, Л85	Очень хорошо деформируются в холодном состоянии, особенно волочением, не склонны к коррозионному растрескиванию, пригодны дляковки, чеканки, эмалирования
Л80	Очень хорошо деформируется в холодном состоянии, мало склонен к коррозионному растрескиванию
Л70	Очень хорошо деформируется в холодном состоянии, пригоден для пайки, для нанесения (плакирования) на сталь
Л68	Очень хорошо деформируется в холодном состоянии (холодной высадкой)
Л63	Основной сплав для деформации в холодном состоянии глубокой вытяжкой, волочением, прокаткой, чеканкой, изгибом, пригоден для пайки и сварки, хорошо полируется
Л60	Хорошо деформируется в горячем и холодном состоянии (ковкой) и пригоден для глубокой вытяжки, хорошая вязкость
ЛА77-2	Средняя прочность, хорошая коррозионная стойкость
ЛО70-1	Очень хорошая коррозионная и эрозионная стойкость
ЛО62-1	Средняя прочность, хорошая коррозионная стойкость
ЛАЖ60-1-1	Высокие прочность и износостойкость, нечувствительность к масляной коррозии, горячедеформируемый, стойкий к агрессивным средам
ЛМцА57-3-1	Средняя прочность и высокая вязкость, коррозионная стойкость
ЛМц58-2	Конструкционный материал высокой прочности, пригодный для пайки, коррозионная стойкость

В электротехнике наиболее широко применяются латуни с высоким содержанием меди марок Л96, Л90, Л85, Л80, Л67, Л59, а также другие марки с соответствующими свойствами. Латуни марок ЛК80-ЗЛ и ЛС59-1Л применяются для изготовления короткозамкнутых роторов асинхронных двигателей заливкой, для изготовления литых токоведущих деталей электрической аппаратуры, латунь марки ЛА67-2.5 — для изготовления литых токоведущих деталей повышенной механической прочности и твердости, латуни марок ЛС59-1 и ЛМЦ58-2 используют для изготовления короткозамкнутых обмоток (беличьих клеток) роторов асинхронных и синхронных электродвигателей, а также для производства токоведущих частей, изготовленных резанием и штамповкой в горячем состоянии.

### 19.3.2. Бронза

Бронзы — сплавы на основе меди с небольшим содержанием олова, кремния, фосфора, бериллия, хрома, магния, кадмия и др. Плотность бронзы находится в пределах 8230...8900 кг/м<sup>3</sup>, предел прочности при растяжении 520...1350 МПа, температура плавления 955...1050 °С. Удельное электрическое сопротивление бронзы при 20 °С составляет 0,095...0,1 мкОм·м, удельная проводимость при 20 °С 10,5...10 МСм/м.

Номинальные диаметры круглых тянутых прутков из бериллиевой бронзы и номинальные диаметры вписанной окружности квадратных и шестигранных прутков находятся в пределах от 5 до 40 мм.

По длине прутки изготавливаются немерной длины: тянутые — от 1,5 до 4,0 м; прессованные диаметром 42 — 75 мм — от 1,0 до 2,5 м; прессованные диаметром 80 — 100 мм — от 0,7 до 2,0 м.

Прутки изготавливаются из бронзы марки БрВ2. Содержание бериллия в бронзе марки БрБ2 в пределах 1,8...2,1%. Прутки изготавливаются: тянутыми мягкими (закаленными) — ЗМ, мягкими после отжига — М, твердыми холоднодеформированными после закалки — ЗТ, твердыми холоднодеформированными после отжига — Т, прессованными.

В электротехнике в качестве проводниковых материалов используют кадмиевую, бериллиевую и фосфористую бронзы.

Кадмиевая бронза обладает наивысшей электрической проводимостью всех марок бронз, поэтому относится к наиболее распространенным проводниковым бронзам. Поскольку кадмиевая бронза обладает повышенным сопротивлением истиранию и повышенной нагревостойкостью, то эта бронза широко при-

меняется для изготовления троллейных проводов и коллекторных пластин для машин постоянного тока.

Бериллиевая бронза обладает высокими упругими свойствами, устойчивыми при нагревании до 250 °С. Она обладает электрической проводимостью, превышающей в 2...2,5 раза проводимость других марок бронз общего назначения, относится к сплавам. Бериллиевая бронза приобретает прочность в результате старения. Она применяется для изготовления различных пружинных деталей, выполняющих одновременно и роль проводника тока: отдельные виды щеткодержателей, токоведущие пружины, скользящие контакты в различных приборах, штепсельные разъемы и т. п.

Фосфористая бронза обладает высокой прочностью и хорошими пружинными свойствами, однако из-за малой электропроводности применяется для изготовления пружинных деталей с низкими плотностями тока.

#### 19.4. Алюминий и проводниковые материалы на его основе

**Алюминий** — металл серебристо-белого цвета, втрое легче меди. На воздухе покрывается тонкой прочной пленкой окиси. Пленка надежно защищает алюминий от дальнейшего окисления и придает ему коррозионную стойкость. Алюминий легко растворяется в серной и соляной кислотах и щелочах. Алюминий уступает по электропроводящим свойствам лишь серебру и меди, а по стоимости значительно их дешевле, что обуславливает исключительно широкое применение алюминия в электротехнике в качестве неизолированных и изолированных проводов, жил и оболочек кабелей, шин и т. д. Основные физические свойства алюминия приведены в табл. 19.12.

Таблица 19.12  
Основные физические свойства алюминия

Марка алюминия	Плотность при 20 °С, кг/м	Удельное сопротивление, мкОм·м	Предел прочности при растяжении, МПа (кгс/см <sup>2</sup> )	Температура плавления, °С	Относительное удлинение перед разрывом, %
АМ (мягкий отожженный)	2703	0,028	80...90 (8...9)	660...657	30...33
АТ (твердый неотожженный)	2703	0,028	150...170 (15...17)	660...657	12...14

В зависимости от содержания алюминия и примесей различают виды первичного алюминия особой (99,999% Al), высокой (99,995...99,95% Al) и технической (99,85...99,0% Al) чистоты. Марки алюминия: особой чистоты А999, высокой чистоты А995, А99, А97, А95, технической чистоты А85, А8, А7, А7Е, А6, А5, А5Е, А0. Таким образом, цифры в марке означают дробь после запятой. Алюминиевая катанка и проволока изготавливаются из слитков алюминия марки А7Е и А5Е. Слитки изготавливаются квадратными в сечении со стороной 100 мм и длиной от 1200 до 2700 мм, массой от 29 до 76 кг.

#### 19.4.1. Катанка алюминиевая

Выпускается катанка следующих марок: АК — катанка, полученная прокаткой из слитков алюминия на проволочнопрокатных станах; АКЛП-5ПТ, АКЛП-7ПТ — катанки, полученные непрерывным литьем и прокаткой, полутвердые; АКЛП-5Т — катанка, полученная непрерывным литьем и прокаткой, твердая.

Удельное сопротивление постоянному току катанки марки АКЛП-5Т при 20 °С не должно превышать 0,02815 мОм·м.

Диаметры алюминиевой катанки находятся пределах от 9 до 23 мм, предельные отклонения по ним соответственно от  $\pm 0,3$  до  $\pm 1,0$  мм.

#### 19.4.2. Проволока алюминиевая круглая электротехническая (ГОСТ 6132-79)

Круглая алюминиевая проволока выпускается следующих марок: АТ — алюминиевая твердая; АПТ — алюминиевая полутвердая; АТП — алюминиевая твердая повышенной прочности для неизолированных проводов линий электропередачи; АМ — алюминиевая мягкая.

Номинальные диаметры алюминиевой проволоки и предельные отклонения от диаметра приведены в табл. 19.13.

В табл. 19.14 приведены сведения о весе одного погонного метра алюминиевой проволоки и стержней в диапазоне диаметров от 1 до 60 мм.

Удельное электрическое сопротивление постоянному току при  $\pm 20$  °С для проволоки твердой, повышенной прочности не превышает 0,0283 мОм·м, твердой и полутвердой проволоки — 0,0280 мОм·м для мягкой проволоки.

Таблица 19.13

**Номинальные диаметры алюминиевой проволоки  
и предельные отклонения от диаметра**

Номинальный диаметр, мм	Предельное отклонение, мм
0,080; 0,090; 0,100; 0,112; 0,120; 0,125; 0,130; 0,140; 0,150; 0,160; 0,170; 0,180; 0,190; 0,200; 0,210; 0,224; 0,230; 0,236; 0,250	±0,004
0,260; 0,265; 0,280; 0,300; 0,315; 0,320; 0,338; 0,355; 0,370; 0,380; 0,400; 0,420; 0,425; 0,450; 0,475; 0,490	+0,009
0,50; 0,52; 0,53; 0,66; 0,58; 0,60; 0,63; 0,64; 0,67; 0,69; 0,71; 0,75; 0,77; 0,80; 0,83; 0,85; 0,90; 0,93; 0,95; 0,97	±0,01
1,00; 1,04; 1,06; 1,08; 1,10; 1,12; 1,13; 1,18; 1,20; 1,25; 1,30; 1,32; 1,35; 1,38; 1,40; 1,45; 1,50; 1,53; 1,56; 1,60; 1,70; 1,78; 1,80; 1,85; 1,90; 2,00; 2,03; 2,10; 2,12; 2,13; 2,14; 2,20; 2,22; 2,24; 2,25; 2,30; 2,36; 2,40; 2,44	±0,02
2,50; 2,51; 2,52; 2,57; 2,59; 2,61; 2,65; 2,70; 2,73; 2,76; 2,80; 2,84; 2,85; 2,90; 2,95; 2,98; 3,00; 3,02; 3,05; 3,15; 3,20; 3,27; 3,30; 3,34; 3,35; 3,36; 3,37; 3,40; 3,45	±0,03
3,50; 3,65; 3,57; 3,60; 3,61; 3,66; 3,67; 3,70; 3,72; 3,75; 3,80; 3,81; 3,90; 3,95; 4,00; 4,10; 4,11; 4,15; 4,23; 4,25; 4,27	±0,04
4,50; 4,75; 5,00; 5,30; 5,60; 5,66; 6,00; 6,30	±0,05
6,60; 7,00; 7,50; 6,00	±0,06
8,50; 9,00; 9,42; 9,50; 10,00	±0,08

Таблица 19.14

**Вес погонного метра алюминиевой проволоки и стержней**

Диаметр, мм	Масса, г	Диаметр, мм	Масса, г	Диаметр, мм	Масса, г	Диаметр, мм	Масса, г	Диаметр, мм	Масса, г	Диаметр, мм	Масса, г
1	2,10	6	75,6	12	302	22	1016	32	2150	42	3704
1,5	1,72	6,5	88,7	13	354	23	1110	33	2286	43	3882
2	8,4	7	102,9	14	411	24	1209	34	2427	44	4066
2,5	13,12	7,5	118	15	472	25	1312	35	2572	45	4253
8	18,9	8	134	16	537	28	1419	36	2721	46	4443
8,5	26,72	8,5	151	17	608	27	1530	37	2874	47	4638
4	33,6	9	170	18	680	28	1646	38	3032	48	4838
4,5	42,5	8,5	189	19	758	29	1766	39	3194	49	5042
Б	52,5	10	210	20	840	30	1890	40	3360	60	5250
6,5	63,5	11	264	21	926	31	2018	41	3530		

### 19.4.3. Шины электротехнического назначения

Шины электротехнического назначения изготовляют прессованием из алюминия марки АД0 и алюминиевого сплава марки АД31.

Шины разделяются в зависимости от вида термической обработки. Шины без термической обработки обозначаются маркой алюминия или сплава без дополнительных знаков (АД0), закаленные и естественно состаренные — Т (АД31Т); закаленные и искусственно состаренные — Т1 (АД31Т1).

Примеры условного обозначения шин: шина АД0-6Х60 — из алюминия марки АД0 размером 6×60 мм; шина АД31Т-6Х60 — из алюминиевого сплава марки АД31, закаленной и естественно состаренной.

Удельное электрическое сопротивление шин постоянному току при 20 °С составляет не более 0,0290 мкОм·м для шин из алюминия марки АД0; 0,0325 мкОм·м для шин из алюминиевого сплава АД31, закаленного и искусственно состаренного; 0,0350 мкОм·м для сплава марки АД31, закаленного и естественно состаренного.

Сечения алюминиевых шин приведены в табл. 19.15.

Таблица 19.15

Сечения алюминиевых шин

Толщина, мм	Ширина, мм
3	6, 10, 12, 15, 20, 25, 30, 40, 50, 60, 80, 100, 120
4	6, 10, 12, 15, 20, 25, 30, 40, 50, 60, 80, 100, 120
6	10, 12, 15, 20, 25, 30, 40, 60, 80, 100, 120
7	80, 100
8	10, 12, 15, 20, 25, 30, 40, 50, 60, 80, 100, 120
10	10, 12, 15, 20, 25, 30, 40, 50, 60, 80, 100, 120
12	12, 15, 20, 25, 30, 40, 50, 60, 80, 100, 120
16	80
20	100, 300
28	250
35	360
40	360, 500
50	360, 430
60	430
65	150
110	120

Шины поставляют длиной от 3 до 6 м при площади поперечного сечения до 1,5 см<sup>2</sup> и длиной от 3 до 9 м при площади поперечного сечения более 1,5 см<sup>2</sup> [19] .

#### 19.4.4. Гильзы и наконечники кабельные алюминиевые

Гильзы кабельные алюминиевые выпускаются из алюминиевых труб. Различают гильзы кабельные алюминиевые с односторонним и двусторонним заполнением. Гильзы предназначены для соединения и ответвления опрессовкой проводов и кабелей на напряжение 1 кВ с алюминиевыми однопроволочными жилами сечением от 2,5 до 10 мм<sup>2</sup>. Гильзы могут использоваться в диапазоне температур от -45 до +45 °С и относительной влажности воздуха 90% при 27 °С.

Средний срок службы гильз не менее 25 лет.

Типы алюминиевых гильз и их технические данные приведены в табл. 19.16, алюминиевых наконечников — в табл. 19.17.

Таблица 19.16

Типы алюминиевых гильз и их технические данные

Тип	Сечение жил (суммарное), мм <sup>2</sup>	Заполнение	Размеры, мм		Масса 1000 шт., кг
			Длина	Внутренний диаметр	
7,5-4-1	7,5	одностороннее	10	4	0,8
7,5-4-2	15	двустороннее	22	4	1,6
13-5-1	13	одностороннее	14	5	1,7
13-5-2	26	двустороннее	28	5	3,4
20,5-6-1	20,5	одностороннее	18	6	2,5
20,5-6-2	41	двустороннее	36	6	5,1
32,5-8-1	32,5	одностороннее	18	8	5,2
32,5-8-2	65	двустороннее	36	8	10,1

Таблица 19.17

Алюминиевые наконечники

Сечение жилы, мм	16	25	35	50	70	95	120	150	185	240	300
Масса 1000 шт, кг, не более	9,2	12,9	19,6	28,8	38,0	44,5	59,9	74,0	78,9	115	150

## 19.5. Серебро, золото и сплавы на их основе

Серебро — металл серебристо-белого цвета, обладает наилучшей среди всех металлов электропроводностью, прекрасно поддается механической обработке. Его плотность  $10500 \text{ кг/м}^3$ , относительное удлинение  $\sim 50\%$ , твердость по Бриннелю HB  $\sim 25$ , предел прочности при растяжении  $150\text{...}300 \text{ МПа}$ , температура плавления  $960,5 \text{ }^\circ\text{C}$ , удельное электрическое сопротивление при  $20 \text{ }^\circ\text{C}$  находится в пределах  $0,015\text{...}0,0162 \text{ мОм}\cdot\text{м}$ , удельная проводимость при  $20 \text{ }^\circ\text{C}$  в пределах  $66\text{...}62 \text{ МСм/м}$ .

Химический состав серебра марки Ср.999,9 соответствует не менее 99,99%, для марки Ср. 999 он составляет 99,9% (ГОСТ 6836-72).

В электротехнике применяются сплавы серебра с другими металлами: медью, золотом, платиной и др. Состав серебряно-медных сплавов марки СрМ приведен в табл. 19.18.

Таблица 19.18

Серебряно-медные сплавы марки СрМ

Марка	Химический состав, %		Марка	Химический состав, %	
	Серебро	Примеси, не более		Серебро	Примеси, не более
СрМ 970	$97,0 \pm 0,3$	0,18	СрМ 800	$90,0 \pm 0,3$	0,25
СрМ 960	$96,0 \pm 0,3$	0,18	СрМ 875	$87,5 \pm 0,3$	0,30
СрМ 950	$95,0 \pm 0,3$	0,20	СрМ 800	$80,0 \pm 0,3$	0,30
СрМ 940	$84,0 \pm 0,3$	0,20	СрМ 770	$77,0 \pm 0,5$	0,30
СрМ 925	$92,5 \pm 0,3$	0,20	СрМ 750	$75,0 \pm 0,5$	0,30
СрМ 916	$91,6 \pm 0,3$	0,25	СрМ 500	$50,0 \pm 0,5$	0,30

Примечание. Остальное — медь.

Сплав серебра и платины марки СрПл4 содержит 96% серебра и 4% платины, сплав СрПл12 соответственно 88% и 12%. Иные примеси — не более 0,25%.

Золото — металл желтого цвета, прекрасно поддается механической обработке: ковке, прокатке, волочению и др. Его плотность  $19500 \text{ кг/м}^3$ , температура плавления составляет  $1064 \text{ }^\circ\text{C}$ , удельное электрическое сопротивление при  $20 \text{ }^\circ\text{C}$  находится в пределах до  $0,022 \text{ мОм}\cdot\text{м}$ .

Химический состав золота для марки Зл999,9 соответствует не менее 99,99% и для марки Зл999 соответственно 99,9%, (ГОСТ 6835-80).

Выпускаются сплавы золота с другими металлами:

золото-серебряные, марок: ЗлСр990-10; ЗлСр750-250; ЗлСр600-400; ЗлСр583-417;

золото-серебряно-медные, марок: ЗлСрМ990-5; ЗлСрМ980-15; ЗлСрМ970-20; ЗлСрМ960-30; ЗлСрМ958-20; ЗлСрМ-950-25; ЗлСрМ930-45; ЗлСрМ900-40; ЗлСрМ-750-125; ЗлСрМ583-80; ЗлСрМ583-200; ЗлСрМ583-200; ЗлСрМ500-100; ЗлСрМ500-200; ЗлСрМ375-20; ЗлСрМ375-100; ЗлСрМ375-160; ЗлСрМ333-333;

золото-медные, марок: ЗлМ980; ЗлМ583;

золото-платиновые, марок: ЗлПл2; ЗлПл5; ЗлПл7; ЗлПл10;

золото-палладиевые, марок: ЗлПд16; ЗлПд20; ЗлПд40;

золото-палладиево-платиновые, марок: ЗлПдПл30-10.

Цифры после букв означают содержание золота и серебра в тысячных долях, содержание второго и третьего компонентов в процентах.

Проволока из золота, серебра и их сплавов. Проволока из золота, серебра и их сплавов выпускается в соответствии с ГОСТ 7222-75.

Номинальные диаметры круглой проволоки определяются стандартным рядом, мм: 0,02; 0,025; 0,03; 0,036; 0,04; 0,045; 0,05; 0,055; 0,06; 0,07; 0,08; 0,09; 0,1; 0,11; 0,12; 0,14; 0,16; 0,18; 0,2; 0,22; 0,25; 0,28; 0,3; 0,32; 0,34; 0,36; 0,38; 0,4; 0,42; 0,45; 0,5; 0,55; 0,6; 0,65; 0,7; 0,75; 0,8; 0,85; 0,9; 0,95; 1; 1,1; 1,15; 1,2; 1,3; 1,4; 1,5; 1,6; 1,7; 1,8; 1,9; 2; 2,1; 2,2; 2,4; 2,5; 2,6; 2,8; 3; 3,2; 3,4; 3,6; 3,8; 4; 4,2; 4,5; 4,8; 5; 5,2; 5,5; 5,8; 6; 6,5; 7; 7,5; 8; 8,5; 9; 9,5; 10.

Диаметр полукруглой проволоки соответствует ряду, мм: 1; 1,2; 1,5; 2; 2,5; 3; 3,5.

Размеры сегментной проволоки соответствуют рядам, мм: хорда 6; 7; 7,5 при стреле 2 и 1,6 и хорда 8; 8,5 при стреле 2,3; 2,8.

Размеры квадратной проволоки соответствуют ряду, мм: сторона квадрата 1,2; 1,6; 2; 2,5; 2,8; 3; 3,6; 4; 5.

Размеры прямоугольной проволоки соответствуют рядам: толщина 1,5; 2,5, ширина 4; 4,5; 5; 6.

Проволока поставляется твердой (нагартованной) или мягкой (отожженной). Мягкая проволока имеет минимальным диаметр 0,2 мм.

Пример условного обозначения проволоки круглой из сплава марки ЗлСрМ583-80, диаметром 3 мм, мягкой: проволока кв. ЗлСрМ583-80-3М.

## 19.6. Сталь и материалы из стали

В электротехнике в качестве проводниковых материалов широко используется сталь и изделия из нее: для изготовления сталеалюминиевых проводов, стальных защитных оболочек кабелей в виде лент, проволоки, гофрированных оболочек. Кроме того, полосы, пруты, уголки и иной стальной прокат используются для устройства заземлений электроустановок и троллей, а листы — для изготовления шкафов распределительных устройств, корпусов и ограждений различных электротехнических установок. Сведения об электротехнических сталях с особыми магнитными свойствами представлены в разделе «Магнитные материалы».

Плотность стали составляет  $7870 \text{ кг/м}^3$ , предел прочности при растяжении в пределах  $700 \dots 1750 \text{ МПа}$ , температура плавления  $1400 \dots 1530 \text{ }^\circ\text{C}$ . Удельное электрическое сопротивление стали при  $20 \text{ }^\circ\text{C}$  находится в пределах  $0,103 \dots 0,137 \text{ мОм}\cdot\text{м}$ , удельная проводимость при  $20 \text{ }^\circ\text{C}$  в пределах  $9,7 \dots 7,3 \text{ МСм/м}$ .

В электротехнике используется, как правило, горячекатаная либо холоднокатаная сталь различного профиля: круглая, уголко-вая, листовая. Сортамент стали исключительно велик, ниже в виде таблиц приведены лишь некоторые его виды, используемые в электротехнических устройствах.

### 19.6.1. Стальная проволока

Стальная проволока используется для изготовления стале-алюминиевых проводов, в качестве брони для кабелей, в устройствах заземления и т. д. В табл. 19.19 приведены техниче-ские данные стальной проволоки.

Таблица 19.19

Технические данные стальной проволоки

Диаметр, мм	Площадь поперечного сечения, мм	Вес на 1 м, кг
0,7	0,385	0,003
1,0	0,785	0,00617
1,4	1,54	0,012
3,0	7,068	0,055
4,0	12,656	0,098
5,0	19,635	0,154
6,0	28,276	0,222

Горячекатаная мягкая круглая стальная проволока диаметром от 5 до 9 мм называется катанкой. Технические данные стальной катанки приведены в табл. 19.20.

Таблица 19.20

Технические данные стальной катанки

Диаметр, мм	Площадь поперечного сечения, мм <sup>2</sup>	Вес погонного метра, кг
5,0	19,63	0,151
5,5	23,79	0,186
6,0	28,27	0,222
6,5	83,18	0,260
7,0	88,48	0,803
7,5	41,19	0,847
8,0	50,27	0,395
9,0	63,63	0,199

Допускаемые отклонения для диаметра проволоки обычной точности прокатки составляют  $\pm 0,5$  мм, повышенной точности прокатки  $\pm 0,3$ .

### 19.6.2. Стальные полосы и ленты

Стальные полосы используются в качестве троллей, для создания контуров заземления.

Технические данные некоторых стальных полос и лент приведены в табл. 19.21 и 19.22.

Таблица 19.21

Стандартные размеры и вес стальной полосы

Толщина, мм	Ширина, мм	Вес 1 м <sup>2</sup> , кг	Толщина, мм	Ширина, мм	Вес 1 м <sup>2</sup> , кг
4	25	0,785	4	35	1,1
5	25	0,98	5	35	1,37
4	30	0,94	4	40	1,25
5	30	1,18	5	40	1,57

Таблица 19.22

Стандартные размеры и вес стальной ленты

Параметр	Холоднокатаная			Горячекатаная								
Толщина, мм	1	1	1	1,5	1,5	2	1,5	2	2	3	2	3
Ширина, мм	10	15	20	20	25	25	30	30	35	35	40	40
Вес, кг	0,08	0,12	0,16	0,24	0,29	0,39	0,35	0,47	0,55	0,82	0,68	0,94

### 19.6.3. Сталь угловая и швеллерная

Для тех же целей, а также для сооружения каркасов конструкций, изготовления металлических опор ЛЭП, используется профилированная сталь: угловая равнополочная, угловая неравнополочная, швеллеры и т. д. Равнополочная сталь выпускается с шириной полки от 20 до 200 мм, швеллерная — высотой от 20 до 300 мм. Номер профиля угловой стали соответствует ширине полки, взятой в сантиметрах, номер профиля швеллера — высоте, взятой в сантиметрах. Технические данные отрезка размеров угловой равнополочной стали приведены в табл. 19.23, отрезка размеров швеллерной — в табл. 19.24.

Таблица 19.23  
Сталь угловая равнополочная

Номер профиля	Ширина полки, мм	Масса погонного метра, кг, при толщине полки, мм					
		3	4	5	6	7	8
2	20	0,89	1,15	—	—	—	—
2,5	25	1,12	1,46	—	—	—	—
2,8	28	1,27	—	—	—	—	—
3,2	32	1,46	1,91	—	—	—	—
3,6	36	1,65	2,16	—	—	—	—
4	40	1,85	2,42	2,98	—	—	—
4,5	45	2,08	2,73	3,37	—	—	—
5	50	2,32	3,05	3,77	—	—	—
5,6	56	—	3,44	4,25	—	—	—
6	60	—	—	4,58	—	—	—
6,3	63	—	3,90	4,81	5,72	—	—
7	70	—	—	5,38	6,39	7,39	—
7,5	75	—	—	—	7,36	8,51	9,65

Таблица 19.24  
Сталь швеллерная

Номер швеллера	Высота швеллера	Толщина стенки	Ширина полки	Толщина полки	Масса 1 м, кг
5	50	4,4	32	7,0	4,84
6,5	65	4,4	36	7,2	5,90
8	80	4,5	40	7,4	7,05

Номер швеллера	Высота швеллера	Толщина стенки	Ширина полки	Толщина полки	Масса 1 м, кг
10	100	4,5	46	7,6	8,59
12	120	4,8	52	7,8	10,40
14	140	4,9	58	8,1	12,30
14a	140	4,9	62	8,7	13,30
16	160	5,0	64	8,4	14,20
16a	160	5,0	68	9,0	15,30
18	180	5,1	70	8,7	16,30
18a	180	5,1	74	9,3	17,4
20	200	5,2	76	9,0	18,40

#### 19.6.4. Трубы стальные

Стальные трубы применяются в электротехнике для прокладки проводов, устройства контуров заземления и иных целей. Технические данные некоторых стальных труб приведены в табл. 19.25 и 19.26.

Таблица 19.25  
Трубы стальные водогазопроводные

D наруж- ный, мм	Легкие		Обыкновенные		Усиленные		Под накатку резьбы		
	Δ стенки, мм	Масса, кг	Δ стенки, мм	Масса, кг	Δ стенки, мм	Масса, кг	D наруж- ный, мм	Δ стенки, мм	Масса, кг
21,3	2,35	1,10	—	—	—	—	20	2,5	1,08
21,3	2,5	1,16	2,8	1,28	3,2	1,43	—	—	—
26,8	2,35	1,42	—	—	—	—	26	2,5	1,45
26,8	2,5	1,50	2,8	1,66	3,2	1,86	—	—	—
33,5	2,8	2,12	3,2	2,39	4,0	2,91	32	2,8	2,02
42,3	2,8	2,12	3,2	3,09	4,0	3,78	41	2,8	2,64
48,0	3,0	3,33	3,5	3,84	4,0	4,34	47	3,0	3,26
60,0	3,0	4,22	3,5	4,88	4,5	6,16	59	3,0	4,14
75,5	3,2	5,71	4,0	7,05	4,5	7,88	74	3,2	5,59
88,5	3,5	7,34	4,0	7,05	4,5	9,32	—	—	—
101,3	3,5	8,44	4,0	9,60	4,5	10,74	—	—	—
114,0	4,0	10,85	4,5	12,5	5,0	13,44	—	—	—

Таблица 19.26

## Трубы стальные электросварные прямошовные

<i>D</i> наруж- ный, мм	$\Delta$ стен- ки, мм	Мас- са, кг	<i>D</i> на- руж- ный, мм	$\Delta$ стен- ки, мм	Мас- са, кг	<i>D</i> на- руж- ный, мм	$\Delta$ стен- ки, мм	Мас- са, кг	<i>D</i> на- руж- ный, мм	$\Delta$ стен- ки, мм	Мас- са, кг
20	1,6	0,726	26	2,0	1,18	48	2,0	2,27	89	2,5	5,33
20	1,8	0,808	33	2,0	1,53	60	2,5	3,55	102	2,8	6,85
26	1,8	1,07	42	2,0	1,97	73	2,5	4,35	114	2,8	7,68

Примечание. В табл. приняты обозначения: *D* наружный — наружный диаметр труб;  $\Delta$  стенки — толщина стенки труб.

## 19.6.5. Листовая сталь

Листовая мягкая низкоуглеродистая холодно- или горячекатаная сталь широко используется в электротехнике для изготовления шкафов распределительных устройств, корпусов и ограждений различных электротехнических установок. Технические данные некоторых видов листовой стали приведены в табл. 19.27 и 19.28.

Таблица 19.27

## Сталь листовая тонкая

Толщина листа, мм	Ширина листа, мм	Длина листа, м	Вес 1 м <sup>2</sup> , кг
1	710...1100	1420...2000	8
1,5	710...1250	1420...2500	12
2	710...1250	1420...2500	16
3	710...1400	1420...2800	24

Таблица 19.28

## Сталь листовая горячекатаная

Толщина листа, мм	Ширина листа, мм							
	600	650	700	800	900	1000	1250	1400
	Длина листа, мм							
0,5	1200	1400	1420	—	—	—	—	—
1	2000	2000	1420	1600	1800	2000	—	—
2	2000	2000	2000	2000	2000	2000	2000	2000
2	—	—	6000	6000	6000	6000	6000	6000

## 19.7. Свинец

*Свинец* — мягкий металл серебристо-белого цвета в разрезе. Плотность свинца  $11350 \text{ кг/м}^3$ , предел прочности при растяжении в пределах  $9,8 \dots 16 \text{ МПа}$ , температура плавления  $327,4 \text{ }^\circ\text{C}$ . Удельное электрическое сопротивление свинца при  $20 \text{ }^\circ\text{C}$  находится в пределах  $0,217 \dots 0,227 \text{ мкОм}\cdot\text{м}$ , удельная проводимость при  $20 \text{ }^\circ\text{C}$  в пределах  $4,6 \dots 4,4 \text{ МСм/м}$ .

Свинец используется в электротехнике для изготовления защитных оболочек кабелей, пластин аккумуляторов, для изготовления плавких вставок предохранителей, в качестве добавки при изготовлении припоев.

В соответствии с ГОСТ 3778-77 свинец изготавливают марок СО, С1С, С1, С2С, С2, С3 и СЗС. Марка свинца определяется степенью его химической чистоты. Марки свинца и его химический состав приведены в табл. 19.29.

Таблица 19.29  
Марки и химический состав свинца

Обозначение марок	Свинец, %, не менее	Нормируемые примеси, %
СО	99,992	0,008
С1С	99,99	0,01
С1	99,985	0,015
С2С	99,97	0,03
С2	99,95	0,05
С3	99,9	0,1
СЗС	99,5	0,5

Свинец марок С1С, С2С и СЗС изготавливают по соглашению с потребителем. Свинец отливают в виде чушек с плоским основанием или в виде чушек взаимозаменяемой формы массой 10 и от 30 до 40 кг.

## 19.8. Олово

*Олово* — мягкий легкоплавкий металл серебристо-белого цвета. Плотность олова  $7300 \text{ кг/м}^3$ , температура плавления  $232 \text{ }^\circ\text{C}$ . Удельное электрическое сопротивление олова при  $20 \text{ }^\circ\text{C}$  находится в пределах  $0,114 \dots 0,120 \text{ мкОм}\cdot\text{м}$ , удельная проводимость при  $20 \text{ }^\circ\text{C}$  в пределах  $8,7 \dots 8,3 \text{ МСм/м}$ . Олово используется в электротехнике для изготовления припоев, в качестве добавок в различных сплавах.

В соответствии с ГОСТ 860-75 в зависимости от химического состава устанавливаются следующие марки олова: ОВЧ-000, О1пч, О1, О2, О3 и О4. Марка ОВЧ-000 высшей чистоты содержит 99,999% олова. В марке О4 содержится 96,43% олова.

Олово всех марок изготавливают в виде чушек. Олово марки ОВЧ-000 изготавливают также в слитках в виде прутков, а марок О1пч и О1 — в виде блоков, приспособленных для механизированного транспортирования.

Области применения олова, масса чушек, блоков и прутков приведены в табл. 19.30.

Таблица 19.30

Марки олова, масса материалов, применение

Марка олова	Масса, кг			Область применения
	блоков	чушек	прутков	
ОВЧ-000	—	5...6	0,25	Для полупроводниковой техники
О1пч	1000	24...26	—	Для производства консервной жести
О1	1000	24...26	—	Для производства жести, изготовления прутков, проволоки, ленты и других изделий из олова, для электротехнических целей и изготовления сплавов и припоев
О2	—	24...26	—	Для изготовления баббитов, сплавов, припоев, оловянного порошка, труб, фольги, лужения кухонной утвари и котлов для варки пищи
О3	—	24...26	—	Для изготовления припоев и солей
О4	—	24...26	—	Для изготовления припоев, баббитов и сплавов, модифицирования серого чугуна

## 19.9. Сплавы с высоким электрическим сопротивлением

### 19.9.1. Физические свойства

Сплавы с высоким электрическим сопротивлением обладают удельным сопротивлением, большим, чем медь, серебро, алюминий и другие хорошие проводники, малым температурным коэффициентом сопротивления, не расплавляются и не окисляются при высокой температуре. Наиболее широко в электромашиностроении, электронике, приборостроении, аппарато-строении и других отраслях промышленности применяются ни-

келевые и медно-никелевые сплавы и прецизионные сплавы на железохромной основе.

Ниже приведены наименование, марки и назначение никелевых и медно-никелевых сплавов:

алюмель марки НМЦАК2-2-1 — для изготовления термопар в паре с хромелевой проволокой;

хромель Т марки НХ9,5 — для изготовления термопар в паре с алюмелевой или копелевой проволокой;

хромель К марки НХ9 — для компенсационных проводов;

копель марки МНМц 43-0,5 — для компенсационных проводов;

манганин марки МНМц3-12 — для эталонных сопротивлений, измерительных приборов высокого класса точности;

константан марки МНМц40-1,5 — для электротехнических целей;

сплав ТБ марки МН16 — для компенсационных проводов;

сплав ТП марки МН0,6 — для компенсационных проводов;

куниаль А марки МНА13-3 — для пружин и изготовления иных пружинящих изделий в электротехнике;

куниаль Б марки МНА6-1,5 — для тех же целей;

монель марки НМЖМц28-2,5-1,5 — коррозионностойкий сплав на основе меди, никеля, кобальта и железа с температурой плавления 1350 °С;

мельхиор марки МН16, МН19 — для электротехнических целей;

нейзильбер марки МНЦ15-20 — для изготовления реостатов;

никель полуфабрикатный марок НПО, НП1, НП-2, НПЗ, НП4, НΠΑН, НПА1, НПА2;

никель марганцовистый НМц2,5, НМц5;

никель кремнистый НК02.

Основные характеристики никелевых и медно-никелевых сплавов, применяемых в электротехнической промышленности, приведены в табл. 19.31.

### 19.9.2. Проволока манганиновая неизолированная

Проволока изготавливается из манганина марок МНМц 3-12 или МНМцАЖ3-12-0,3-0,3. Различается по форме сечения, твердости или мягкости, точности изготовления. Твердая проволока изготавливается из манганина марки МНМц 3-12 всех диаметров; мягкая — из манганина марок МНМц 3-12 и МНМцАЖ 3-12-0,3-0,3 диаметром 0,5 мм и более. Диаметр проволоки и ее электрическое сопротивление при 20 °С приведены в табл. 19.32.

Таблица 19.31

Основные характеристики никелевых и медно-никелевых сплавов

Наименование сплава	Марка сплава	Химический состав, %				Удельное электрическое сопротивление, мкОм·м
		Марганец	Никель и кобальт	Медь	Алюминий Хром Цинк	
Алюмель	НМцАК2-2-1	1,8...2,7	Остальное, в том числе кобальт 0,6...1,2	—	Алюминий 1,6...2,4 Кремний 0,85...0,6	0,305
Хромель	НХ9.6	—	0,6...1,2	—	Хром 9...10	0,66
Хромель К	НХ9	—	Остальное, в том числе кобальт 0,4...1,2	—	Хром 8,5...10	0,66
Копель	МНМц43-0,6	0,1...0,5	42,5...44,0	Остальное	—	0,465
Константан	МНМц40-1,5	1,0...2,0	39,0...41,0	Остальное	—	0,45...0,52
Манганин	МНМц3-12	11,5...13,5	2,5...3,5	Остальное	—	0,40...0,52
Нейзильбер	МНЦ15.20	0,3	13,6...16,5	Остальное	Цинк 18,0...22,0	0,3...0,32
Никель марганцовистый	НМц2,5	2,3...3,2	Остальное	—	—	—
Никель марганцовистый	НМц5	4,6...5,4	Остальное	—	—	—
Сплав ТВ	МН16	—	15,3...16,3	Остальное	—	—
Сплав ТП	МН0,6	—	0,57...0,63	Остальное	—	—
Куниаль Б	МНА6-1,5	—	5,5...5,6	Остальное	Алюминий 1,2...1,8	—

Таблица 19.32

Номинальный диаметр и электрическое сопротивление манганиновой проволоки при 20 °С

Номинальный диаметр проволоки, мм	Сопротивление 1 м проволоки, Ом		Номинальный диаметр проволоки, мм	Сопротивление 1 м проволоки, Ом	
	мягкой	твердой		мягкой	твердой
0,02	—	1370...2340	0,6	1,49...2,00	1,52...2,04
0,025	—	876...1390	0,63	1,35...1,84	1,38...1,88
0,03	—	608...927	0,65	1,27...1,73	1,30...1,78
0,04	—	342...551	0,7	1,09...1,48	1,12...1,51
0,05	214...327	219...333	0,75	0,951...1,28	0,974...1,30
0,06	149...219	152...223	0,8	0,836...1,12	0,856...1,14
0,07	109...157	112...160	0,85	0,740...0,986	0,758...1,00
0,08	83,6...118	85,6...120,0	0,9	0,660...0,876	0,676...0,892
0,09	66,0...91,7	67,6...93,6	1,0	0,536...0,719	0,548...0,733
0,10	53,5...87,6	54,8...89,2	1,1	0,443...0,590	0,453...0,601
0,12	37,1...57,9	38,1...59,0	1,2	0,371...0,493	0,381...0,502
0,14	27,3...41,2	27,9...41,9	1,3	0,317...0,418	0,324...0,426
0,15	23,8...35,4	24,4...36,0	1,4	0,273...0,358	0,279...0,365
0,16	20,9...33,8	21,4...34,5	1,5	0,238...0,311	0,244...0,317
0,18	16,5...25,9	16,9...26,4	1,6	0,209...0,272	0,214...0,278
0,2	13,4...20,5	13,7...20,9	1,7	0,185...0,240	0,189...0,245
0,22	11,1...16,6	11,3...16,9	1,8	0,165...0,214	0,169...0,218
0,25	8,58...12,5	8,76...12,8	1,9	0,148...0,192	0,152...0,195
0,28	6,82...9,59	6,98...9,99	2,0	0,134...0,176	0,137...0,180
0,3	5,94...8,45	6,09...8,62	2,2	0,111...0,145	0,113...0,147
0,35	4,37...6,27	4,47...6,39	2,5	0,085...0,11	0,0876...0,113
0,36	4,12...5,91	4,23...6,02	2,8	0,068...0,088	0,0699...0,0899
0,38	3,71...5,26	3,79...5,36	3,0	0,0595...0,0776	0,0609...0,0781
0,4	3,35...4,71	3,42...4,81	3,6	0,0413...0,0334	0,0423...0,0545
0,45	2,64...3,67	2,71...3,74	4,0	0,0335...0,0431	0,0343...0,0439
0,5	2,14...2,94	2,19...2,99	4,5	0,0265...0,0339	0,0271...0,0345
0,85	1,77...2,41	1,81...2,46	5,0	0,0214...0,0273	0,0219...0,0279
0,56	1,71...2,32	1,75...2,36	6,0	0,0149...0,0189	0,0152...0,0192

### 19.9.3. Проволока константановая неизолированная

Проволоку изготавливают из константана марки МНМц 40-1,5. Проволока бывает диаметром 0,09 мм и менее — твердой, диаметром свыше 0,09 мм — твердой и мягкой.

Удельное электрическое сопротивление при 20...25 °С мягкой проволоки соответствует  $0,465 \pm 0,015$  мкОм·м, удельное электрическое сопротивление твердой проволоки  $0,490 \pm 0,030$  мкОм·м.

Номинальные диаметры и предельные отклонения от него приведены в табл. 19.33.

Таблица 19.33

Номинальные диаметры константановой проволоки  
и предельные отклонения от диаметра

Номинальный диаметр, мм	Предельное отклонение, мм
0,02; 0,025; 0,03; 0,04	(-0,002)
0,05; 0,06	(-0,004)
0,07; 0,08; 0,09	(-0,005)
0,1; 0,12; 0,14; 0,15; 0,16; 1,18; 0,2; 0,22; 0,25; 0,28;	(-0,02)
0,3; 0,33; 0,35; 0,38; 0,4; 0,45; 0,5; 0,55; 0,60; 0,65; 0,7; 0,75; 0,8; 0,85; 0,9	(-0,03)
1,0; 1,1; 1,2; 1,3; 1,4; 1,5; 1,6; 1,7; 1,8; 1,9	(-0,04)
2,0; 2,25; 2,5; 2,75; 3,0	(-0,06)
3,5; 4,0; 4,5; 5,0	(-0,07)

### 19.9.4. Проволока из марганцевого никеля

Проволоку изготавливают из марганцевого никеля марок НМц 2,5 и НМц 5. Проволоку диаметром 0,05...0,15 мм выпускают в мягком (отожженном) или твердом (неотожженном) состояниях. Проволоку диаметром 0,50...5,0 мм выпускают в мягком (отожженном) или твердом (неотожженном) состоянии.

Номинальный диаметр проволоки из марганцевого никеля и предельные отклонения от него приведены в табл. 19.34.

Удельное электрическое сопротивление проволоки из марганцевого никеля при 20 °С соответствует табл. 19.35.

Таблица 19.34

**Номинальные диаметры проволоки из марганцевого никеля  
и предельные отклонения от диаметра**

Диаметр проволоки, мм	Предельные отклонения, мм, для проволоки точности изготовления	
	повышенной	нормальной
0,05; 0,064; 0,07; 0,076; 0,084; 0,09	-0,002	-0,003
0,10; 0,104; 0,12; 0,13; 0,15	-0,003	-0,005
0,5; 0,56; 0,6	-0,025	-0,040
0,65; 0,7; 0,8; 0,9	-0,030	-0,045
1,0; 1,2; 1,5; 1,6; 2,0; 2,5; 3,0	-0,040	-0,060
4; 5	-0,048	-0,080

Таблица 19.35

**Удельное электрическое сопротивление проволоки  
из марганцевого никеля**

Марка сплава	Состояние материала	Удельное электрическое сопротивление мкОм·м
НМЦ 2,5	Мягкий	0,12...0,16
НМД 2,5	Твердый	0,13...0,17
НМц 5	Мягкий и твердый	0,17...0,22

### 19.9.5. Проволока из сплавов на железохромистой основе

Проволока из прецизионных сплавов на железохромистой основе с высоким электрическим сопротивлением используется для нагревательных элементов и для элементов сопротивлений. Проволоку изготавливают в мягком термически обработанном состоянии. Предельные размеры проволоки в зависимости от марки сплава приведены в табл. 19.36, удельное электрическое сопротивление сплава — в табл. 19.37.

Таблица 19.36

**Предельные диаметры проволоки из сплавов  
на железохромистой основе**

Марка сплава	Диаметры, мм	Марка сплава	Диаметры, мм
X15Ю5	0,2...7,5	X23Ю5	0,3...7,5
X15H60-H	0,1...7,5	X23Ю5T	0,3...7,6
X15H60	0,3...7,5	XH70Ю	1,0...7,0
X20H80-H	0,1...7,5	X27Ю5T	0,5...5,5

Таблица 19.37

Удельное электрическое сопротивление сплава

Марка	Диаметр, мм	Удельное электрическое сопротивление сплава при 20 °С, мкОм·м
X15Ю5	Все диаметры	1,24...1,34
X23Ю5	Все диаметры	1,30...1,40
X23Ю5Т	Все диаметры	1,34...1,45
X27Ю5Т	Все диаметры	1,37...1,47
X15Н60	От 0,1 до 3,0	1,06...1,16
X15Н60-Н	Свыше 3,0	1,07...1,17
X20Н80-Н	Свыше 3,0	1,06...1,17
ХН70Ю	Все диаметры	1,25...1,35

### 19.9.6. Лента из прецизионных сплавов на железохромистой основе

Лента из прецизионных сплавов на железохромистой основе с высоким электрическим сопротивлением используется для нагревательных элементов и для элементов сопротивлений.

Ленту изготавливают фиксированной ширины: 6, 8, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 25, 30, 32, 36, 40, 45, 50, 60, 80, 100, 150, 200 и 250 мм. Размеры лент в зависимости от марки сплава находятся в пределах, представленных в табл. 19.38.

Таблица 19.38

Размеры лент из прецизионных сплавов

Марки сплавов	Толщина, мм	Ширина, мм	Длина, м
X13Ю4, X15Ю5, X23Ю5, X23Ю5Т, X27Ю5Т	0,2...3,2	6...80	10
X15Н60, X15Н60-Н, X20Н80, X20Н80-Н	0,1...3,2	6...250	20 или 40

Значения удельных сопротивлений лент, изготовленных из прецизионных сплавов на железохромистой основе при температуре 20 °С, приведены в табл. 19.39.

Таблица 19.39

Удельные сопротивления лент, изготовленных из прецизионных сплавов на железохромистой основе

Марка	Толщина ленты, мм	Удельное электрическое сопротивление при 20 °С, мкОм·м
X13Ю4	Все размеры	1,18...1,34
X16Ю5	Все размеры	1,24...1,34
X23Ю5	Все размеры	1,30...1,40
X23Ю5Т	Все размеры	1,34...1,45
X27Ю5Т	Все размеры	1,37...1,47
X15Н60	0,1...3	1,06...1,16
X15Н60-Н	Свыше 3	1,07...1,17
X20Н80	0,1...3	1,04...1,15
X-20Н30-Н	Свыше 3	1,06...1,17

### 19.9.7. Прокат из прецизионных сплавов с высоким электрическим сопротивлением

В электротехнике используются изделия из сортового проката круглого и квадратного сечений из прецизионных сплавов с высоким электрическим сопротивлением. В зависимости от марки сплава изготавливают прокат круглого сечения диаметром от 6 до 30 мм, квадратного сечения со стороной 5 мм.

Удельное электрическое сопротивление сортового проката из прецизионных сплавов с высоким электрическим сопротивлением диаметром менее 8 мм приведено в табл. 19.40.

Таблица 19.40

Удельное электрическое сопротивление сортового проката

Марка	Удельное электрическое сопротивление при 20 °С, мкОм·м
X13Ю4*	1,18...1,34
X15Ю5	1,24...1,34
X23Ю5	1,30...1,40
X23Ю5Т	1,34...1,45
X27Ю5Т	1,37...1,47
X25Н20*	0,83...0,96
X15Н60, X15Н60-Н	1,07...1,17
X20Н80*, X20Н80-Н	1,06...1,17
XН70Ю	1,25...1,35

\* Сплавы данных марок в настоящее время не выпускаются.

Электрическое сопротивление 1 м сортового проката в мягком состоянии приведено в табл. 19.41.

Таблица 19.41

Электрическое сопротивление 1 м сортового проката

Марки	Электрическое сопротивление 1 м, Ом							
	Диаметр, мм							Сторона квадрата, мм
	8	9	10	11	12	13	14	0,5
X15Ю5	0,023	0,018	0,015	0,012	0,010	0,009	0,008	—
	0,030	0,024	0,019	0,015	0,013	0,011	0,009	—
X23Ю5	0,024	0,019	0,016	0,013	0,011	0,010	0,008	0,061
	0,031	0,025	0,020	0,016	0,014	0,012	0,010	0,059
X23Ю5Т, X27Ю5Т	0,025	0,020	0,016	0,013	0,011	0,010	0,008	0,054
	0,033	0,026	0,021	0,017	0,014	0,012	0,010	0,062
X25Н20	0,016	0,012	0,010	0,008	0,007	0,006	0,005	—
	0,022	0,017	0,014	0,011	0,009	0,008	0,007	—
X15Н60-Н, X15Н60	0,020	0,016	0,013	0,011	0,009	0,008	0,007	—
X20Н80-Н, X20Н80	0,027	0,021	0,017	0,014	0,011	0,010	0,008	—
ХН70Ю	0,024	0,019	0,015	0,012	0,010	0,009	0,008	—
	0,030	0,025	0,019	0,015	0,013	0,011	0,009	—

Время испытания высокой температурой, в течение которого сплавы сохраняют свои физические свойства, называют их живучестью. Табл. 19.42 характеризует живучесть сплавов с высоким электрическим сопротивлением.

Таблица 19.42

Живучесть прецизионных сплавов  
с высоким электрическим сопротивлением

Марка сплава	Температура испытания, °С	Живучесть, ч, не менее	Марка сплава	Температура испытания, °С	Живучесть, ч, не менее
X13Ю4	1000	100	X27Ю5Т	1300	60
X15Ю5	1120	100	X15Н60-Н	1120	100
X23Ю5	1200	120	X20Н80-Н	1175	100
X23Ю5Т	1200	120	ХН70Ю	1200	100

### 19.9.8. Проволока тончайшая и наитончайшая из сплавов высокого электрического сопротивления

Тончайшая и наитончайшая проволока из сплавов высокого электрического сопротивления используется в электротехнической промышленности, в частности для изготовления прецизионных проволочных сопротивлений. Тончайшей называют проволоку диаметром от 0,09 до 0,4 мм, наитончайшей — проволоку диаметром от 0,009 до 0,09 мм. Проволока изготавливается из сплавов марок Х20Н80, Х15Н60, а также из сплавов Х20Н80-ВИ, Н80ХЮД-ВИ, ЭП277-ВИ. Проволока изготавливается в отожженном состоянии.

Номинальные диаметры проволоки из сплавов высокого электрического сопротивления в зависимости от массы сплава приведены в табл. 19.43.

Таблица 19.43

Номинальные диаметры тончайшей и наитончайшей проволок  
из сплавов высокого электрического сопротивления

Марка сплава	Номинальный диаметр, мм
Х20Н80-ВИ	0,009; 0,01; 0,011; 0,012; 0,014; 0,016; 0,018; 0,02; 0,022; 0,025; 0,03; 0,032; 0,036; 0,04; 0,05; 0,08; 0,07; 0,08; 0,09; 0,1; 0,11; 0,12; 0,14; 0,15; 0,16; 0,18; 0,2; 0,22; 0,25; 0,28; 0,3; 0,32; 0,36; 0,4
Н80ХЮД-ВИ	0,02; 0,022; 0,025; 0,03; 0,04; 0,05; 0,06; 0,07; 0,08; 0,09; 0,1; 0,12; 0,15; 0,18; 0,2; 0,22; 0,25; 0,3; 0,34; 0,4
ЭП277-ВИ	0,03; 0,04; 0,05; 0,06
Х20Н80, Х15Н60	0,1; 0,11; 0,12; 0,14; 0,15; 0,16; 0,18; 0,2; 0,22; 0,25; 0,28; 0,3; 0,32; 0,34; 0,36; 0,4

По виду поверхности проволоку делят на группы: С и О; по допускаемому отклонению электрического сопротивления 1 м проволоки — на классы: I, Ia, II, III. Проволока группы С может быть эмалированной.

Номинальное значение электрического сопротивления 1 м тончайшей и наитончайшей проволок приведено в табл. 19.44, в табл. 19.45 приведены допустимые отклонения электрического сопротивления проволоки [19].

Таблица 19.44

Номинальное значение электрического сопротивления 1 м тончайшей  
и наитончайшей проволок

Номинальный диаметр проволоки, мм	Номинальное значение электрического сопротивления, Ом/м, сплава марки			
	X20H80-ВИ	X15H60	H80XЮД-ВИ	ЭП277-ВИ
0,009	15400	—	—	—
0,010	12500	—	—	—
0,011	10300	—	—	—
0,012	8660	—	—	—
0,014	6630	—	—	—
0,016	5000	—	—	—
0,018	4010	—	—	—
0,020	3340	—	4190	—
0,022	2810	—	3460	—
0,025	2180	—	2680	—
0,030	1510	—	1881	1940
0,032	1330	—	—	—
0,036	1050	—	—	—
0,04	852	—	1049	1150
0,05	646	—	669	750
0,06	379	—	458	560
0,07	279	—	341	—
0,08	214	—	261	—
0,09	169	—	206	—
0,1	137	139	167	—
0,11	113	115	—	—
0,12	95	96,9	116	—
0,14	70,0	71,3	—	—
0,15	61,0	62,2	74	—
0,16	63,8	54,7	—	—
0,18	42,5	43,3	51	—
0,2	34,5	352	41,5	—
0,22	28,6	29,1	35,5	—
0,25	22,2	22,6	26,5	—
0,28	17,7	18,1	—	—
0,3	16,4	16,8	18,4	—
0,32	13,6	13,9	—	—
0,34	12,1	12,3	14,3	—
0,36	10,8	11,0	—	—
0,4	8,8	8,9	10,6	—

Таблица 19.45

Допустимые отклонения электрического сопротивления тончайшей и наитончайшей проволок

Номинальный диаметр проволоки, мм	Допускаемое отклонение электрического сопротивления, %, для проволоки класса			
	I	Ia	II	III
От 0,009 до 0,012	±10	+15...-5	±15	±20
С 0,012 до 0,018	—	+15...-5	±12	±15
С 0,018 до 0,025	±8	—	±12	±15
С 0,025 до 0,050	±6	—	±10	±15
С 0,050 до 0,080	±4	—	±8	±12
С 0,080 до 0,160	±3,5	—	±6	±10
С 0,160 до 0,400	±3	—	±5	±8

## 19.10. Жаростойкие проводниковые сплавы

Жаростойкими являются сплавы на основе хрома и никеля, имеющие температуру плавления в пределах от 1300 до 1500 °С. Основные марки сплавов следующие: Х15Н60, Х20Н80, Х20Н80-Н, Х13Ю4, ОХ23Ю5, ОХ23Ю5А, ОХ27Ю5А.

Из сплавов изготавливают проволоку либо ленты, которые используют в лабораторных и промышленных печах и реостатах (Х15Н60, Х20Н80, Х20Н80-Н), в бытовых и лабораторных печах и реостатах (Х13Ю4), в лабораторных и промышленных печах (ОХ23Ю5), в лабораторных и промышленных печах с большим сроком службы (ОХ23Ю5А, ОХ27Ю5А).

Проволока выпускается: холоднотянутая диаметром от 0,1 до 10 мм и горячетянутая диаметром от 6 до 12 мм.

Ленты выпускаются: холоднокатанные толщиной от 0,1 до 3,2 мм, шириной от 4 до 100 мм; горячекатанные толщиной от 1,2 до 3,2 мм и шириной от 20 до 200 мм.

Основные физические свойства жаростойких сплавов представлены в табл. 19.46.

В табл. 19.46 меньшие значения рабочих температур являются оптимальными, большие — предельными.

## 19.11. Биметаллические изделия

### 19.11.1. Термобиметаллы

Термобиметалл состоит из двух или нескольких слоев металлов или сплавов с различными температурными коэффициента-

Таблица 19.46

## Основные физические свойства жаростойких сплавов

Марка	Плотность, кг/м	Температура плавления, °С	Удельное электрическое сопротивление при 20 °С, мкОм·м	Температурный коэффициент сопротивления, 1/°С	Коэффициент линейного расширения, 1/°С	Рабочая температура, °С
X15H60	8,2	1370...1400	1,06...1,16	$(13...15) \cdot 10^{-5}$	$1,6 \cdot 10^{-5}$	950...1000
X20H80	8,4	1390...1420	1,06...1,16	$(13...15) \cdot 10^{-5}$	$1,6 \cdot 10^{-5}$	1000...1100
X20H80-H	8,4	1400...1450	1,07...1,16	$(12...13) \cdot 10^{-5}$	$1,5 \cdot 10^{-5}$	1150...1200
X13Ю4	7,2...7,3	1450...1460	1,13...1,34	$(15...18) \cdot 10^{-5}$	$1,5 \cdot 10^{-5}$	900...1000
OX23Ю5	6,9...7	1500...1510	1,27...1,45	$(4...5) \cdot 10^{-5}$	$1,7 \cdot 10^{-5}$	1150...1200
OX23Ю5A	7,1...7,2	1490...1510	1,36...1,40	$(4...5) \cdot 10^{-5}$	$1,7 \cdot 10^{-5}$	1175...1200
OX27Ю5A	7,2...7,4	1500...1510	1,37...1,47	$(5...6) \cdot 10^{-5}$	$1,5 \cdot 10^{-5}$	1250...1300

ми расширения, сваренных между собой по всей плоскости соприкосновения. Слой металла или сплава с большим температурным коэффициентом расширения называется активным слоем, с меньшим температурным коэффициентом расширения — пассивным слоем; между указанными слоями может быть промежуточный слой.

Сочетание активного и пассивного слоев обуславливает основные свойства термобиметалла: чувствительность к изменению температуры, проявляющаяся в механической деформации, и электрическое сопротивление.

Чувствительность к изменению температуры характеризуется удельным изгибом или коэффициентом чувствительности. Удельный изгиб — это изгиб свободного конца пластинки термобиметалла длиной 100 мм и толщиной 1 мм при нагревании на 1 °С. Коэффициент чувствительности — условная разность температурных коэффициентов расширения активного и пассивного слоев термобиметалла [19].

Наименование марки термобиметалла состоит из букв ТБ и последующего четырехзначного числа, в котором первые две цифры соответствуют удельному изгибу, умноженному на 100; третья цифра указывает номер группы, определяющей уровень удельного сопротивления, четвертая цифра указывает номер группы, определяющей максимальное значение рекомендуемой температуры службы. Марки термобиметаллов и их составляющих приведены в табл. 19.47.

Термобиметаллы поставляют в виде холоднокатаных лент (отрезков) и полос толщиной от 0,1 до 2,5 мм шириной от 10 до 250 мм. Условная характеристика основных свойств термобиметаллов по группам в зависимости от их уровня приведены в табл. 19.48.

Таблица 19.47

## Марки термобиметаллов и их составляющих

Марка термобиметалла	Марка составляющих		Марка термобиметалла	Марка составляющих	
	Активный слой	Пассивный слой		Активный слой	Пассивный слой
ТБ2013	75ГНД	36Н	ТБ1243*	24НХ	36Н
ТБ1613	75ГНД	45НХ	ТБ1253*	24НХ	36Н
ТБ1523	20НГ	36Н	ТБ1132	24НХ	42Н
ТВ 1423	24НХ	36Н	ТБ1032	19НХ	42Н
ТВ 1323	19НХ	36Н	ТБ0921	28НХТЮ	45НТЮ
ТВ 1353	Л62	36Н	ТБ0953	НПЗ	36Н
ТБ1254	Л90	36Н	ТБ0831	24НХ	50Н

\* Термобиметаллы ТБ1243 и ТБ1253 имеют промежуточные слои соответственно из сплавов НП2 и М1.

Таблица 19.48

## Условная характеристика основных свойств термобиметаллов

Основные свойства термобиметаллов	Условная характеристика основных свойств термобиметаллов				
	Высокие	Повышенные	Средние	Пониженные	Низкие
	Номера групп				
	1	2	3	4	5
Удельный изгиб, °С	>0,15	0,12...0,15	0,075...0,115	<0,975	—
Коэффициент чувствительности, 1/°С	>24	19...24	12...18,5	<12	—
Удельное электрическое сопротивление, мкОм·м	>1,0	0,75...1,0	0,55...0,74	0,30...0,54	<0,3
Рекомендуемая температура службы (нагрев без нагрузки), °С	>350	<350	<250	<150	—

Основные свойства термобиметаллов — удельный изгиб, коэффициент чувствительности, удельное сопротивление приведены в табл. 19.49. Удельное электрическое сопротивление определяется при 20 °С. Значения удельного изгиба приведены для температурных интервалов от 30 до 200 °С, коэффициента чувствительности — для температурных интервалов от 30 до 140±10 °С.

Таблица 19.49

## Основные свойства термобиметаллов

Марка тер- мобиметал- ла	Удельный изгиб, °С	Допускаемое откло- нение по удельному изгибу, %	Коэффициент чув- ствительности, $10^6, 1/^\circ\text{C}$	Удельное сопро- тивление, мкОм·м
ТБ2013	0,20	$\pm 10$	30...36	1,08...1,18
ТБ1613	0,16	$\pm 12$	23...28	1,18...1,27
ТБ1523	0,15	$\pm 12$	21...28	0,77...0,82
ТБ1423	0,14	$\pm 12$	20...24	0,77...0,84
ТБ1323	0,13	$\pm 12$	18,5...22,5	0,76...0,83
ТБ1353	0,13	$\pm 15$	19,5...25	0,14...0,20
ТБ1254	0,12	$\pm 15$	19...24	0,09...0,14
ТБ1243	0,12	$\pm 15$	18...22	0,38...0,43
ТБ1253	0,12	$\pm 15$	18...22	0,15...0,18
ТБ1132	0,11	$\pm 12$	16...19	0,68...0,74
ТБ1032	0,105	$\pm 12$	16,5...18,5	0,67...0,73
ТБ0921	0,09	$\pm 15$	12...16	0,87...0,97
ТБ0953	0,09	$\pm 15$	12...16	0,15...0,20
ТБ0831	0,075	$\pm 12$	10...13	0,55...0,60

## 19.11.2. Проволока биметаллическая сталемедная

Биметаллическая сталемедная проволока включает стальной сердечник, заключенный в медную оболочку, и выпускается трех марок: БСМ 0, БСМ 1 и БСМ 2.

Проволока используется для электротехнических целей, в том числе для изготовления проводов связи марок ПАБАР, ПСБАВ, ПСБАП. Диаметр проволоки БСМ находится в пределах от 1,2 мм до 6 мм.

Диаметр и величины электрического сопротивления биметаллической сталемедной проволоки постоянному току при 20 °С приведены в табл. 19.50.

## 19.12. Коммутирующие контакты и материалы

Коммутирующие контакты служат для управляемого замыкания и размыкания электрических цепей. Коммутирующие контакты подразделяются на:

- слаботочные (токи от долей до единиц ампер),
- сильноточные (токи от единиц до тысяч ампер).

Таблица 19.50

Электрическое сопротивление проволоки БСМ

Диаметр проволоки, мм	Электрическое сопротивление, Ом/км, не более		
	БСМ 0	БСМ 1	БСМ 2
1,2	42,6	47,3	58,0
1,6	23,4	26,0	32,0
2,0	14,8	16,4	20,0
2,2	12,2	13,5	17,0
2,5	9,4	10,4	13,0
2,8	7,4	8,2	10,0
3,0	6,4	7,1	9,0
4,0	3,8	4,0	5,0
6,0	1,8	2,0	2,2

### 19.12.1. Слаботочные контакты

Слаботочные контакты изготавливаются преимущественно из сплавов на основе серебра, платины, палладия, золота, вольфрама, иридия и др. Физические свойства металлов и сплавов для этих контактов приведены в табл. 19.51.

Таблица 19.51

Физические свойства металлов и сплавов  
для слаботочных контактов

Марка	Химический состав, %	Плотность, кг/м <sup>3</sup>	Температура плавления, °С	Число Бригелля	Удельное сопротивление, МкОм·м
Пл99,9-99,7	Платина 99,7...99,9	21450	1773	40	0,105
Пд99,9-99,8	Палладий 99,8...99,9	12160	1554	32	0,108
Рд99,9-99,8	Родий 99,8...99,9	12400	1966	55	0,045
Зл999-999,9	Золото 99,9...99,99	19300	1063	20	0,022
Ср999-999,9	Серебро 99,9...99,99	10500	961	25	0,016

Окончание табл. 19.51

Марка	Химический состав, %	Плотность, кг/м³	Температура плавления, °С	Число Бригелля	Удельное сопротивление, МкОм·м
ПЛИ-10	Платина—иридий 90/10	21540	1795	126	0,250
ПЛИ-25	Платина—иридий 75/25	21680	1875	246	0,330
ПлРу-10	Платина—рутений 90/10	19950	1780	190	0,430
ПлН-4,5	Платина—никель 95,5/4,5	20170	1700	135	0,230
ПлРд-10	Платина—родий 90/10	20000	1840	90	0,192
—	Платина—вольфрам 95/5	21280	1850	103	0,402
—	Платина—молибден 90/10	20500	1800	195	0,585
ПДИ-10	Палладий—иридий 90/10	12740	1565	125	0,260
ПДИ-18	Палладий—иридий 82/18	13250	1580	195	0,360
ПдСр-20	Палладий—серебро 80/20	11790	1425	56	0,300
ПдСр-10	Палладий—серебро 60/40	11440	1330	52	0,420
ЗлСр750-250	Золото—серебро 75/25	19960	1044	26	0,099
ЗлПл-7	Золото—платина 93/7	19440	1160	40	0,102
ЗлН5	Золото—никель 95/5	18240	990	100	0,123
ЗлСрМ583-300	Золото—серебро—медь 58/30/12	13920	835	125	0,108
—	Золото—серебро—никель 70/25/5	15400	1050	80	0,118
СрМ960	Серебро—медь 96/4	10430	880	43	0,018
СрМ925	Медь—серебро 92/5/7,5	10360	779	57	0,019
СрМ900	Серебро—медь 90/10	10320	779	64	0,019
СрМ750	Серебро—медь 75/25	10060	779	82	0,020
СрПл-12	Серебро—платина 88/12	11190	870	115	0,120
СрПд-20	Серебро—палладий 80/20	10790	1070	35	0,102
СрКд86-14	Серебро—кадмий 86/14	10200	895	52	0,029
ВРН	Вольфрам 99,85	19300	3410	250	0,055
МЧ	Молибден 99,958	10200	2620	150	0,052
—	Вольфрам—молибден 95/5	—	3180	280	0,065

## 19.12.2. Сильноточные коммутирующие контакты

Сильноточные контакты коммутируют токи от единиц до тысяч ампер. Различают цельнометаллические контакты из сплавов благородных металлов с вольфрамом и молибденом и металлокерамические, которые изготавливаются из металлокерамических композиций порошков путем прессования смеси порошков и спекания их при высокотемпературном отжиге. Металлокерамические контакты имеют большой срок службы, высокую надежность и меньшие эксплуатационные расходы.

Буква Б в обозначении контактов означает наличие меди, буква А — серебра. Например: КМК-Б20, КМК-А31.

Марки и физические свойства металлокерамических контактов приведены в табл. 19.52 [8, 19].

Таблица 19.52  
Физические свойства композиций для слаботочных контактов

Марка	Компоненты и их содержание, %	Плот- ность, кг/м	Число Бринелля	Удельное сопротив- ление, мкОм·м, не более	Удельная теплопро- водность, Вт/(м·°C)
<i>Контакты, применяемые, как правило, для низковольтных аппаратов</i>					
КМК-А10мн	Серебро—окись кад- мия, 85/15	9700	100	0,028	325
КМК-А30	Серебро—никель, 70/30	9600	75	0,030	355
КМК-А30м	То же, с мелкодисперс- ной структурой	9700	105	0,029	360
КМК-А31	Серебро—никель, 60/40	9500	80	0,035	310
КМК-А31М	То же, с мелкодисперс- ной структурой	9600	115	0,035	310
КМК-А41	Серебро—графит, 97/3	9300	50	0,026	—
КМК-А40	Серебро—графит, 95/5	8700	40	0,030	420
КМК-А32	Серебро—никель—гра- фит, 68/29/3	8900	65	0,035	355
КМК-А33мд	Серебро—никель—гра- фит, 69/29/3	9500	95	0,035	—
КМК-А60	Серебро—вольфрам— никель, 48/50/2	13500	160	0,041	275
КМК-А61	Серебро—вольфрам— никель, 27/70/3	1500	210	0,045	230
<i>Контакты, применяемые для отключения токов 30—100 кА</i>					
КМК-Б10	Медь—графит, 97/3	7300	35	0,040	380

Марка	Компоненты и их содержание, %	Плот- ность, кг/м	Число Бринелля	Удельное- сопротив- ление, мкОм·м, не более	Удельная теплопро- водность, Вт/(м·°C)
<i>Контакты, применяемые, как правило, для высоковольтных выключателей</i>					
КМК-Б20	Медь—вольфрам—ни- кель, 48/50/2	12 100	150	0,060	190
КМК-Б21	Медь—вольфрам—ни- кель, 27/70/3	13800	200	0,070	135
КМК-Б00	Медь	8600	65	0,021	—

### 19.13. Припой

Припои предназначены для обеспечения надежного электрического соединения проводников в электрических схемах, а также для лужения металлических изделий. Припои — это сплавы двух и более металлов. В зависимости от компонентов сплава различают припои: оловянно-свинцовые, оловянно-цинковые, цинко-алюминиевые, серебряные сплавы, медно-цинковые и др.

Важным компонентом при пайке является флюс, роль которого заключается в очистке поверхности спаиваемых металлов от окислов и других загрязнений, предохранении поверхности паяемых металлов от окисления, а также для уменьшения поверхностного натяжения расплавленного припоя. Сведения о флюсах представлены ниже в соответствующем разделе.

В зависимости от требуемой прочности соединения паяемых изделий и предельно допустимых рабочих температур различают мягкие (легкоплавкие), полутвердые и твердые (тугоплавкие) припои.

Мягкие и полутвердые припои с температурой плавления до 400 °C имеют предел прочности при растяжении до 50—70 МПа и применяются для пайки токоведущих частей, не являющихся одновременно несущими.

Твердые припои имеют рабочую температуру плавления более 500 °C, предел прочности до 500 МПа и применяются при пайке токоведущих частей электрических машин и аппаратов, допускающих высокий нагрев деталей и воспринимающих в рабочем режиме механическую нагрузку.

### 19.13.1. Оловянно-свинцовые припои

Оловянно-свинцовые припои (ГОСТ 21930-76) выпускаются высшей и первой категории в чистом виде, а также с присадками (сурьмы, кадмия и др.) в виде слитков, прутков, проволоки, ленты и трубок, заполненных канифолью.

В зависимости от химического состава оловянно-свинцовые припои изготавливаются следующих марок:

— бессурьмянистые — ПОС 90, ПОС 61, ПОС 40, ПОС 30, ПОС 10, ПОС 6Ш, ПОСК 60-18, ПОСК 2-18;

— малосурьмянистые — ПОССу 61-ОД, ПОССу-50-0,5, ПОССу 40-0,5, ПОССу35-0,5, ПОССу 30-0,5, ПОССу 25-0,5, ПОССу 18-0,5;

— сурьмянистые — ПОСу95-5, ПОССу 40-2, ПОССу 35-2, ПОССу 30-2, ПОССу 25-2, ПОССу 18-2, ПОССу 15-2, ПОССу 10-2, ПОССу 8-3, ПОССу 5-1, ПОССу 4-6, ПОССу 4-4.

Химический состав припоев соответствует марке, где первое число указывает содержание олова, %, а второе — содержание основной примеси: Су означает сурьма, К — кадмий, М — медь.

Марки и физические свойства оловянно-свинцовых припоев приведены в табл. 19.53, а в табл. 19.54 — области применения оловянно-свинцовых припоев.

Таблица 19.53  
Марки и физические свойства оловянно-свинцовых припоев

Марка припоя	Температура плавления, °С		Плотность, кг/м	Удельное сопротивление, мкОм·м
	Солидус	Ликвидус		
ПОС 61	183	190	8500	0,139
ПОС 40	183	238	9300	0,159
ПОС 10	268	299	10800	0,200
ПОС 61М	183	192	8500	0,143
ПОСК 50-18	142	145	8800	0,133
ПОССу 61-0,5	183	189	8500	0,140
ПОССу 50-0,5	183	216	8900	0,149
ПОССу 40-0,5	183	235	9300	0,169
ПОССу 35-0,5	183	245	9500	0,172
ПОССу 30-0,5	183	265	8700	0,179
ПОССу 25-0,5	183	266	10000	0,182
ПОССу 18-0,5	183	277	10200	0,198
ПОСу 95-5	234	240	7300	0,145
ПОССу 40-2	185	229	9200	0,172
ПОССу 33-2	185	243	9400	0,179
ПОССу 30-2	185	250	9600	0,182

Марка припоя	Температура плавления, °С		Плотность, кг/м	Удельное сопротивление, мкОм·м
	Солидус	Ликвидус		
ПОССу 25-2	185	260	9800	0,183
ПОССу 18-2	188	270	10100	0,206
ПОССу 15-2	184	275	10300	0,208
ПОССу 10-2	268	285	10700	0,208
ПОССу 8-3	240	290	10500	0,207
ПОССу 5-1	275	308	11200	0,200
ПОССу 4-6	244	270	10700	0,208

Таблица 19.54

Области преимущественного применения припоев

Марка припоя	Рекомендуемая область применения
ПОС 90	Для лужения и пайки внутренних швов пищевой посуды и медицинской аппаратуры
ПОС 61	Для лужения и пайки электро- и радиоаппаратуры, печатных схем, точных приборов с высокогерметичными швами, где недопустим перегрев
ПОС 40	Для лужения и пайки электроаппаратуры, деталей из оцинкованного железа с герметичными швами
ПОС 10	Для лужения и пайки контактных поверхностей электрических аппаратов, приборов, реле
ПОСК 50-18	Для пайки деталей, чувствительных к перегреву, металлизированной керамики, для ступенчатой пайки конденсаторов
ПОССу 61-0,5	Для лужения и пайки электроаппаратуры, пайки элементов печатных плат, обмоток электрических машин, оцинкованных радиодеталей при жестких требованиях к температуре
ПОССу 50-0,5	Для лужения и пайки авиационных радиаторов
ПОССу 40-0,5	Для лужения и пайки жести, обмоток электрических машин, для пайки монтажных элементов, моточных и кабельных изделий
ПОССу 35-0,5	Для лужения и пайки свинцовых кабельных оболочек электро-технических изделий
ПОССу 30-0,5	Для лужения и пайки листового цинка, радиаторов
ПОССу 25-0,5	Для лужения и пайки радиаторов
ПОССу 18 0,5	Для лужения и пайки трубок теплообменников, электроламп
ПОСу 95-5	Для пайки в электротехнической промышленности, для пайки трубопроводов, работающих при повышенных температурах
ПОССу 40-2	Припой широкого назначения
ПОССу 30-2	Для лужения и пайки в холодильном аппаратостроении, электроламповом производстве
ПОССу 18-2	Для пайки в автомобилестроении
ПОССу 15-2	То же

Марка припоя	Рекомендуемая область применения
ПОССч 10-2	То же
ПОССу 8-3	Для лужения и пайки в электроламповом производстве
ПОССу 5-1	Для лужения и пайки деталей, работающих при повышенных температурах
ПОССу 4-6	Для пайки белой жести, для лужения и пайки деталей с закатанными и клепаными швами из латуни и меди
ПОССу 4-4	Для лужения и пайки в автомобилестроении
ПОСК 2-18	Для лужения и пайки металлизированных и керамических деталей

Таблица 19.55

## Химический состав мягких припоев

Наименование припоя	Марка	Химический состав, %				
		Олово	Свинец	Кадмий	Медь	Сурьма
Олово	02	99,9	—	—	—	—
Бессурьмянистые	ПОС61	60...62	Остальное	—	—	—
	ПОС40	39...41		—	—	
	ПОС10	9...10		—	—	
	ПОС61 М	60...62		—	1,5...2,0	
	ПОСК50-18	45...51		17...19	—	
Малосурьмянистые	ПОССу61-0,5	60...62	Остальное	—	—	0,2...0,5
	ПОССу40-0,5	39...41		—	—	
	ПОССу30-0,5	29...41		—	—	
	ПОССу18-0,5	17...18		—	—	
Сурьмянистые	ПОССу95-5	94...96	—	—	—	4...5

Оловянно-свинцовые припои выпускаются в виде проволоки, прутков, трубок и лент.

Проволока выпускается диаметром 0,5; 0,6; 0,8; 1,0; 1,2; 1,5; 1,8; 2,0; 2,5; 3,0; 3,5; 4,0; 5,0; 6,0; 7,0 мм.

Оловянно-свинцовые прутки выпускаются круглыми, трехгранными и квадратными.

Диаметр круглых прутков: 8,0; 10; 12; 15 мм.

Размеры сторон трехгранных прутков: 10; 12; 14; 16 мм.

Размеры сторон квадратных прутков: 5,0; 7,0; 9,0; 11; 13; 15 мм. Длина прутков — 400 мм.

Наружные и внутренние диаметры трубок: 1/0,5; 1,5/7; 2,0/1,0; 2,5/1,2; 3,0/1,5; 4,0/2,0; 5,0/2,5 мм.

Ленты имеют толщину 0,8 и 1,0 мм при ширине 8...10 мм; 1,5; 2,0; 2,5; 3,0; 4,0; 5,0 при ширине 5...10 и 15 мм.

Длина отрезка проволоки, трубки, ленты — не менее 10 м.

### 19.13.2. Припои серебряные

Серебряные припои (ГОСТ 19746-74) отличаются малым удельным электрическим сопротивлением и поэтому широко применяются для паяния токоведущих частей, а также всех черных и цветных металлов, которые хорошо смачиваются этими припоями. При этом образуются механически прочные и коррозионностойкие паяные швы. Обозначение припоев включает буквы П — припой, Ср — серебро, Кд — кадмий, Ц — цинк, Су — сурьма, М — медь, Ф — фосфор, О — олово, С — свинец. Цифры после букв Ср означают содержание серебра в %, в конце обозначения через черточку — содержание серебра и других металлов. Например: ПСр 12М означает припой с содержанием 12% серебра, остальное — медь; ПсрМО 68-27-5 означает припой с содержанием серебра 68%, меди — 27, олова — 5%.

Марки и химический состав серебряных припоев приведены в табл. 19.56. В таблице приняты обозначения:  $T_{пл}$  — температура плавления припоя,  $\rho$  — удельное электрическое сопротивление припоя, Остальн. — остальное содержание

Серебряные припои выпускают в виде проволоки и в виде полосы (ГОСТ 19746-74 и ГОСТ 19739-74).

Диаметр проволоки: 0,15; 0,20; 0,25; 0,30; 0,40; 0,50; 0,60; 0,80; 1,0; 1,20; 1,60; 2,00; 2,50; 3,0; 3,60; 4,00; 5,00; 6,00 мм.

Толщина полосы: 0,10; 0,12; 0,15; 0,20; 0,2; 0,30; 0,40; 0,50; 0,60; 0,80; 1,00; 1,20; 1,60; 2,00; 2,50; 3,00; 4,00; 5,00 мм. Ширина полосы: 50; 100; 150 и 200 мм. Длина: 100, 150, 200, 300, 400 мм.

### 19.13.3. Припои твердые на основе меди и цинка

Медно-цинковые, а также медно-фосфорные припои имеют высокую температуру плавления, малое удельное электрическое сопротивление, но отличаются хрупкостью и не обладают стойкостью по отношению к ударным нагрузкам и вибрациям.

Марки, состав и свойства медно-цинковых припоев приведены в табл. 19.57.

### 19.13.4. Припои на алюминиевой основе

Припои на алюминиевой основе с добавками меди, кремния и олова предназначены для пайки алюминиевых проводов и изделий. Припои отличаются повышенной механической прочностью и стойкостью к атмосферной коррозии.

Марки и химический состав серебряных припоев

Марка припоя	Химический состав, %				Плотность, кг/м <sup>3</sup>	T <sub>пл</sub> , °C	ρ, мкОм·м
	Серебро	Медь	Цинк	Олово			
ПСр 72	72,0±0,5	Остальное	—	—	10000	779	2,1
ПСр 71	71,0±0,5	Остальное	—	—	9800	795	4,3
ПСр 70	70,0±0,5	26,0±0,5	Остальное	—	9800	770	4,1
ПСрМО66-27-5	68,0±0,5	Остальное	—	5,0±0,5	9900	765	14,0
ПСр 66	63,0±0,5	20,0±0,5	Остальное	—	9450	722	8,6
ПСр 62	62,0±1,0	—	—	Остальное	9600	723	25,5
ПСр 50	50,0±0,5	Остальное	—	—	9300	860	2,5
ПСр 50КД	50,0±0,5	16,0±1,0	16,0±1,0	—	9260	640	7,8
ПСр КДМ50-34-16	50,0±0,5	Остальное	—	—	9400	615	6,6
ПСр 45	45,0±0,5	30,0±0,5	Остальное	—	9100	730	10,0
ПСрМЦд 45-15-16-24	45,0±0,5	Остальное	16,0±1,0	—	9400	615	6,8-
ПСр 40	40,0±1,0	16,7±0,7	17,0±0,8	—	9250	610	7,0
ПСр 37,5	37,5±0,5	Остальное	5,5±0,5	—	8900	810	37,2
ПСр 25	25,0±0,3	40,0±1,0	Остальное	—	8700	775	7,7
ПСр 25Ф	25,0±0,5	Остальное	—	—	8300	725	18,6
ПСр 15	13,0±0,5	Остальное	—	—	8500	810	20,7

Окончание табл. 19.56

Марка припоя	Химический состав, %				Плотность, кг/м³	T <sub>пл</sub> , °C	ρ, мкОм·м
	Серебро	Медь	Цинк	Олово			
ПСр 12М	12,0±0,3	52,0±1,0	Остальное	—	8300	830	7,4
ПСр 10	10,0±0,3	53,0±1,0	Остальное	—	8400	850	7,1
ПСрО 10-90	10,0±0,5	—	—	Остальное	7600	280	12,9
ПСрОСУ 8 (ВПр-6)	8,0±0,5	—	—	Остальное	7400	250	19,7
СПрМО 5 (ВПр-9)	5,0±0,5	2,0±0,5	—	—	7400	240	16,3
ПСрОС3,5-95	3,5±0,4	—	—	—	7400	224	12,3
ПСр 3	3,0±0,3	—	—	—	11400	315	20,4
ПСрО 3-97	3,0±0,3	—	—	Остальное	7400	225	12,5
ПСрОС 3-58	3,0±0,4	—	—	57,8±1,0	8600	190	14,5
ПСр 3КД	3,0±0,5	—	1,0±0,5	—	8700	342	8,0
ПСр 2,5	2,5±0,3	—	—	5,5±0,5	11000	300	21,4
ПСр 2,5 С	2,5±0,2	—	—	—	11300	306	20,7
ПСр 2	2,0±0,2	—	—	30,0±1,0	9500	238	16,7
ПСрОС 2-58	2,0±0,3	—	—	58,8±1,0	8500	183	14,1
ПСр 1,5	1,5±0,3	—	—	15,0±1,0	10400	280	19,1
ПСр 1	1,0±0,2	—	—	35,0±1,0	9400	235	26,0

Таблица 19.57

Марки, состав и свойства медно-цинковых припоев

Марка припоя	Состав припоя, % по массе	$T_{пл}$ , °C	Предел прочности при растяжении, МПа	Область применения
ПМЦ-54	Медь — 54 Цинк — 46	880	260	Пайка деталей из меди, латуни, бронзы и стали. Образуются хрупкие швы
ПМЦ-48	Медь — 48 Цинк — 52	865	220	То же
ПМЦ-36	Медь — 36 Цинк — 64	825	200	То же
Л63	Медь — 66 Цинк — 35	905	320	То же
ЛОК-62-06-04	Медь — 63 Олово — 0,4 Кремний — 0,4 Цинк — остальное	905	450	То же, но паяные швы обладают большей механической прочностью

При пайке припоями А, В и кадмиевым флюсы не применяются. Места пайки только предварительно тщательно зачищаются стальной щеткой.

Марки и свойства припоев приведены в табл. 19.58.

Таблица 19.58

Припой на алюминиевой основе

Марка припоя	Состав припоя, % по массе	$T_{пл}$ , °C	Предел прочности при растяжении, МПа	Область применения
34-А	Алюминий — 66 Медь — 28 Кремний — 6	525	180	Пайка изделий из алюминия и его сплавов; места пайки обладают высокой механической прочностью
35-А	Алюминий — 72 Медь — 2,1 Кремний — 7	540	140	То же
А	Медь — 1,5 Олово — 40 Цинк — 58,5	425	80	Пайка и лужение алюминиевых проводов
В	Алюминий — 12 Медь — 8 Цинк — 80	410	185	То же
Кадмиевый	Кадмий — 24 Олово — 36 Цинк — 40	300	85	Пайка алюминиевых проводов малого диаметра

## 20. МАГНИТНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

### 20.1. Основные определения и классификация

*Магнитными* называют материалы, основным свойством которых является способность намагничиваться под влиянием внешнего магнитного поля. К магнитным материалам относятся материалы на основе чистого железа, никеля, кобальта и их сплавов. Магнитные свойства материалов характеризуются рядом физических величин или магнитными характеристиками. Приведем основные магнитные характеристики.

*Абсолютная магнитная проницаемость.* Абсолютная магнитная проницаемость  $\mu_a$  равна отношению величины магнитной индукции  $B$  в материале к величине напряженности магнитного поля  $H$  в нем, Гн/м:

$$\mu_a = B/H.$$

Абсолютная магнитная проницаемость может быть определена как произведение магнитной постоянной  $\mu_0$  на относительную магнитную проницаемость  $\mu$ :

$$\mu_a = \mu_0 \mu.$$

Магнитная постоянная  $\mu_0$  характеризует магнитное поле в вакууме, Гн/м:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} = 1,2566.$$

*Амплитудная магнитная проницаемость* (динамическая проницаемость). Амплитудная магнитная проницаемость определяется как отношение максимального значения индукции к максимальному значению напряженности на динамической кривой индукции, снятой в переменном поле. При низких частотах и малой толщине магнитного материала динамическая проницаемость совпадает с абсолютным значением  $\mu_a$ .

Магнитная проницаемость зависит от напряженности магнитного поля  $H$ , измеряемой в амперах на метр (А/м). Различают начальную магнитную проницаемость, измеряемую в очень слабых

магнитных полях при значениях напряженности магнитного поля близких к нулю, и максимальную магнитную проницаемость.

*Температурный коэффициент магнитной проницаемости.* Магнитная проницаемость зависит от температуры магнитного материала. Эта зависимость определяется *температурным коэффициентом магнитной проницаемости*, который характеризует изменение магнитной проницаемости при изменении температуры магнитного материала,  $^{\circ}\text{C}^{-1}$ :

$$TK\mu = (\mu_2 - \mu_1)/\mu_1(t_2 - t_1),$$

где  $\mu_2$  — магнитная проницаемость материала при температуре  $t_2$ ,  $\mu_1$  — магнитная проницаемость материала при температуре  $t_1$ .

*Коэрцитивная сила.* Коэрцитивной силой  $H_c$  называют напряженность магнитного поля на предельном цикле магнитного гистерезиса (статической предельной петле гистерезиса), при которой индукция в материале равна нулю ( $B = 0$ ).

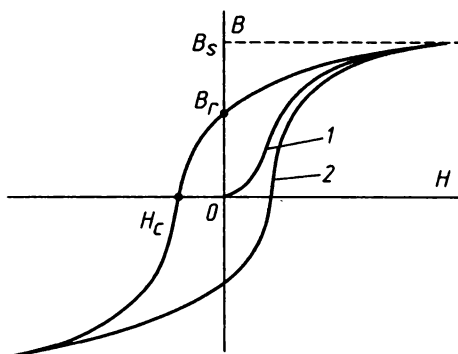


Рис. 20.1. Основная кривая намагничивания (1) и статическая петля гистерезиса (2)

Магнитный поток измеряется в веберах (Вб).

*Остаточная магнитная индукция.* Остаточная магнитная индукция  $B_r$  — это индукция в намагниченном материале, при которой напряженность магнитного поля  $H$  равна нулю (рис. 20.1).

*Индукция насыщения.* Индукция насыщения — наибольшее для данного магнитопровода значение индукции. Магнитная индукция измеряется в теслах (Тл), поскольку индукция  $B$  определяется как величина магнитного потока  $\Phi$ , приходящаяся на единицу площади  $S$ :

$$B = \Phi/S, \text{ то } 1\text{ Т} = 1\text{ Вб/м}^2.$$

*Потери на гистерезис.* Потери на гистерезис  $P_H$  — это мощность, расходуемая на перемагничивание материала в переменном магнитном поле, Вт.

*Потери на вихревые токи.* Потери на вихревые токи  $P_B$  — это мощность, учитывающая потери на вихревые токи в магнитном материале, Вт.

*Удельные потери в магнитном материале.* Удельные потери в магнитном материале  $P$  — это суммарные потери, возникающие при заданной магнитной индукции  $B$  и частоте  $f$  переменного поля, отнесенные к 1 кг материала (Вт/кг), при синусоидальной форме переменной магнитной индукции.

*Максимальная удельная энергия.* Максимальная удельная энергия  $W$  — это энергия магнитотвердых материалов, создаваемая магнитом в воздушном зазоре (между полюсами магнита), отнесенная к единице объема магнита.

*Удельное электрическое сопротивление.* Удельное электрическое сопротивление  $\rho$ , является электрической характеристикой магнитных материалов и позволяет определить потери на вихревые токи в материале.

*Классификация.* Магнитные материалы в зависимости от их свойств классифицируются следующим образом.

1. *Магнитомягкие материалы* — материалы с высокой проницаемостью в слабых и средних полях и низкой коэрцитивной силой. К ним относятся электротехнические стали, пермаллой, викаллой, термаллой.

Магнитомягкие материалы применяются для изготовления магнитопроводов электрических машин, магнитопроводов трансформаторов и реакторов, полюсных наконечников, сердечников, катушек, дросселей электромагнитов и т. д.

2. *Магнитотвердые материалы* с высокой коэрцитивной силой. Магнитотвердые материалы применяются для изготовления постоянных магнитов электрических машин, электроизмерительных приборов, магнитных муфт и т. д.

3. *Прецизионные материалы* со специальными свойствами (высокой магнитострикцией, термомагнитными, коррозионно стойкими и другими свойствами).

Магнитные прецизионные материалы со специальными свойствами применяются для изготовления магнитострикционных преобразователей, магнитопроводов систем, работающих в агрессивных средах, магнитных шунтов измерительных приборов.

Магнитные материалы классифицируют также в соответствии с их основой. Различают: металлические материалы, неметаллические материалы, магнитодиэлектрики.

*Металлические магнитомягкие материалы* — это чистое (электролитическое) железо, листовая электротехническая

сталь, железо-армко, пермаллой (железо-никелевые сплавы) и др.

*Металлические магнитотвердые материалы* — это легированные стали, специальные сплавы на основе железа, алюминия, никеля и легирующих компонентов (кобальт, кремний).

*Неметаллические магнитные материалы* — это материалы, получаемые из порошкообразной смеси окислов некоторых металлов, и окиси железа — ферриты. Ферриты делятся на магнитомягкие и магнитотвердые. Прессованные ферритовые изделия подвергают высокотемпературной обработке — обжигу при температуре 1300...1500 °С.

*Магнитодиэлектрики* — это композиционные материалы, которые включают 70...80% порошкообразного магнитного материала и 30...20% органического высокополимерного диэлектрика.

Магнитодиэлектрики и ферриты отличаются от металлических магнитных материалов большими значениями удельного электрического сопротивления. Это значительно снижает потери на вихревые токи, что позволяет использовать эти материалы в технике высоких частот.

## 20.2. Сталь электротехническая тонколистовая

Среди металлических магнитомягких материалов наиболее широко в электротехнической промышленности применяются электротехнические тонколистовые стали.

Сталь электротехническая тонколистовая подразделяется:

- на три класса по структурному состоянию и виду прокатки;
- по содержанию кремния;
- на группы по основной нормируемой характеристике.

По структурному состоянию и виду прокатки различают три класса электротехнической тонколистовой стали:

1 класс — горячекатаная изотропная сталь;

2 класс — холоднокатаная изотропная;

3 класс — холоднокатаная анизотропная сталь с ребровой текстурой;

По содержанию кремния:

0 — сталь с содержанием кремния до 0,4% (нелегированная);

1 — сталь с содержанием кремния от 0,4 до 0,8%;

2 — сталь с содержанием кремния от 0,8 до 1,8%;

3 — сталь с содержанием кремния от 1,8 до 2,8%;

4 — сталь с содержанием кремния от 2,8 до 3,8%;

5 — сталь с содержанием кремния свыше 3,8 до 4,8%.

Добавление кремния в электротехническую сталь улучшает магнитные характеристики стали, повышает ее удельное электрическое сопротивление и снижает потери на вихревые токи.

В зависимости от основной нормируемой характеристики сталь делят на группы:

0 — удельные потери при магнитной индукции 1,7 Тл и частоте 50 Гц (обозначаются  $p_{1,7/50}$ );

1 — удельные потери при магнитной индукции 1,5 Тл и частоте 50 Гц ( $p_{1,5/50}$ );

2 — удельные потери при магнитной индукции 1,0 Тл и частоте 400 Гц ( $p_{1,0/50}$ );

6 — магнитная индукция в слабых магнитных полях при напряженности поля  $H = 0,4$  А/м ( $B_{0,4}$ );

7 — магнитная индукция в средних магнитных полях при напряженности поля 10 А/м ( $B_{10}$ ).

Электротехнические стали обозначают посредством системы вышеприведенных цифр. В обозначении марки цифры означают: первая (1, 2, 3) — класс по структурному состоянию и виду прокатки; вторая (0...5) — содержание кремния; третья — группу по основной нормируемой характеристике. Вместе первые три цифры в обозначении марки означают тип стали; четвертая — порядковый номер типа стали. Например, обозначение 1511 означает: сталь электротехническая тонколистовая, горячекатаная изотропная, с содержанием кремния от 3,8 до 4,8%, с удельными потерями  $p_{1,5/50}$ ; обозначение 3411 означает сталь электротехническая тонколистовая, холоднокатаная анизотропная с ребровой структурой, с содержанием кремния от 2,8 до 3,8%, с удельными потерями  $p_{1,5/50}$ .

В табл. 20.1 приведены марки тонколистовых электротехнических сталей и их классификационные признаки.

Таблица 20.1

Марки и классификационные признаки сталей

Марка стали	Класс по виду прокатки	Содержание кремния, %	Группы	Марка стали	Класс по виду прокатки	Содержание кремния, %	Группы
1211 1212 1213	1	0,8...1,8	1	2011 2012 2013	2	До 0,4	1
1311 1312 1313		1.8...2.8		2111 2112		0,4...0,8	

Окончание табл. 20.1

Марка стали	Класс по виду прокатки	Содержание кремния, %	Группы	Марка стали	Класс по виду прокатки	Содержание кремния, %	Группы
1411 1412 1413	1	2,8...3,8	1	2211 2212	2	0,8...1,8	1
1511 1512 1513 1514		3,8...4.8		2311 2312		1,8...2,8	
1521				2411 2412		2,8...3,8	
1561 1562 1571 1572			2	3411 3412 3413	3	2,8...3,8	0
			6	3414 3415 3416			
			7	3404 3405 3406			

### 20.2.1. Сталь электротехническая горячекатаная тонколистовая (ГОСТ 21427.3-75)

Сталь горячекатаную тонколистовую изготавливают следующих марок: 1211, 1212, 1213, 1311, 1312, 1313, 1411, 1412, 1413, 1511, 1512, 1514, 1521, 1561, 1562, 1571 и 1572.

Сведения о размерах листов стали приведены в табл. 20.2.

Таблица 20.2

Размеры листов горячекатаной тонколистовой стали

Толщина листов, мм	Длина листов при ширине, мм								
	500	530	600	670	700	750	800	860	1000
0,10	—	—	600	—	720	750	—	—	—
0,20 и 0,22	—	—	—	—	720, 1400	750, 1500	—	—	—
0,35	—	—	—	—	—	1500	—	—	1000, 2000
0,50	1500	1590	1200, 1500, 1800	1340	1400	1500	1600, 1720	1720	2000
0,65	—	—	1500	1340	—	1500	—	1720	—
1,00	—	—	—	1340	—	1500	—	1720	2000

Магнитные свойства сталей марок 1211, 1212, 1213, 1311, 1312, 1313, 1411, 1412, 1413, 1511, 1512, 1514 приведены в табл. 20.3. Магнитные свойства стали марки 1521 представлены в табл. 20.4, стали марок 1561 и 1562 — в табл. 20.5, стали марок 1571 и 1572 — в табл. 20.6.

Таблица 20.3

Магнитные свойства стали типов 121, 131, 141 и 151

Марка стали	Толщина, мм	Удельные потери, Вт/кг		Магнитная индукция, Тл, при напряженности магнитного поля, А/м, не менее				
		$P_{1,0/5,0}$	$P_{1,0/50}$	1000	2500	5000	10000	30000
1211	1,00	5,8	13,4	—	1,53	1,63	1,76	2,00
	0,50	3,3	7,7	—	1,53	1,64	1,76	2,00
1212	1,00	5,4	12,5	—	1,53	1,62	1,76	2,00
	0,65	3,4	8,0	—	1,50	1,62	1,75	1,98
	0,50	3,1	7,2	—	1,50	1,62	1,75	1,98
1213	1,00	4,7	10,7	—	1,50	1,62	1,75	1,98
	0,65	3,2	7,5	—	1,50	1,62	1,75	1,98
	0,50	2,8	6,5	—	1,50	1,62	1,75	1,98
1311	0,50	2,5	6,1	—	1,48	1,59	1,73	1,95
1312	0,50	2,2	5,3	—	1,48	1,59	1,73	1,95
1313	0,50	2,1	4,6	—	1,48	1,59	1,73	1,95
1411	0,50	2,0	4,4	—	1,46	1,57	1,72	1,94
	0,35	1,6	3,6	—	1,46	1,57	1,71	1,92
1412	0,50	1,8	3,9	—	1,46	1,57	1,71	1,92
	0,35	1,4	3,2	—	1,46	1,57	1,71	1,92
1413	0,50	1,55	3,5	—	1,48	1,59	1,73	1,94
	0,35	1,35	3,0	—	1,48	1,59	1,73	1,94
1511	0,50	1,55	3,5	1,30	1,46	1,57	1,70	1,90
	0,35	1,35	3,0	1,30	1,46	1,57	1,70	1,90
1512	0,50	1,40	3,1	1,29	1,43	1,56	1,69	1,89
	0,35	1,20	2,8	1,29	1,45	1,56	1,69	1,89
1513	0,50	1,25	2,9	1,29	1,44	1,55	1,69	1,89
	0,35	1,05	2,5	1,29	1,44	1,55	1,69	1,89
1514	0,50	1,15	2,7	1,29	1,44	1,55	1,69	1,89
	0,35	0,93	2,2	1,29	1,44	1,55	1,69	1,89

Таблица 20.4

Магнитные свойства стали марки 1521

Толщина, мм	Удельные потери, Вт/кг, не более		Магнитная индукция, Тл, при напряженности магнитного поля, А/м, не менее		
	$P_{0,75/400}$	$P_{1,0/400}$	500	1000	2500
0,35	10,75	19,5	1,21	1,30	1,44
0,22	8,0	14,0	1,20	1,29	1,42
0,20	7,2	12,5	1,20	1,29	1,42
0.10	6,0	10,5	1,1	1,28	1,40

Таблица 20.5

Магнитные свойства стали марок 1561 и 1562

Марка	Толщина, мм	Магнитная индукция, Тл, при напряженности магнитного поля, А/м, не менее		
		0,2	0,4	0,8
1561	0,35	0,00010	0,00022	0,00065
	0,20	0,00010	0,00023	0,00060
1562	0,35	0,00012	0,00028	0,00076
	0,20	0,00012	0,00030	0,00075

Таблица 20.6

Магнитные свойства стали марок 1571 и 1572

Марка	Толщина, мм	Магнитная индукция, Тл, при напряженности магнитного поля, А/м, не менее							
		10	20	50	70	100	200	500	1000
1571	0,20	0,030	0,10	0,38	0,58	0,66	0,90	1,18	1,29
	0,35	0,035	0,14	0,48	0,61	0,77	0,92	1,21	1,30
1572	0,20	0,040	0,14	0,48	0,62	0,74	0,92	1,20	1,29
	0,35	0,045	0,17	0,57	0,71	0,87	1,02	1,25	1,30

## 20.2.2. Электротехническая горячекатаная тонколистовая сталь с нормированным коэффициентом заполнения

Электротехническая горячекатаная листовая сталь марок 1411, 1412, 1413, 1511, 1512, 1513, 1514 толщиной 0,50 и 0,35 мм, марки 1521 толщиной 0,35 и 0,20 мм, марок 1561,

1562, 1571 толщиной 0,20 мм с нормированным коэффициентом заполнения предназначена для изготовления электрических машин и аппаратов.

Технические данные стали с нормированным коэффициентом заполнения приведены в табл. 20.7.

Таблица 20.7

Электротехническая горячекатаная сталь с нормированным коэффициентом заполнения

Марки	Толщина листа, мм	Коэффициент заполнения, %, не менее
1411, 1412, 1413	0,50	0,93
1411, 1412, 1413	0,35	0,92
1511, 1512, 1513, 1514	0,50	0,93
1511, 1512, 1513, 1514, 1521	0,35	0,92
1521, 1561, 1562, 1571, 1572	0,20	0,89

В настоящее время горячекатанная сталь не выпускается

### 20.2.3. Сталь электротехническая холоднокатаная изотропная тонколистовая (ГОСТ 21427.2-83)

Тонколистовую сталь изготавливают следующих марок: 2011, 2012, 2013, 2111, 2112, 2211, 2212, 2311, 2312, 2411 и 2412.

Сталь поставляется в листах, в рулонах и в виде ленты резанной с термостойким электроизоляционным покрытием ЭТ, с нетермостойким электроизоляционным покрытием Э, без покрытия БП, с электроизоляционным покрытием.

Рулонную сталь изготавливают толщиной 0,35; 0,50 и 0,65 мм и шириной 500, 530, 600, 670, 750, 860 и 1000 мм.

Размеры листов при толщине 0,35; 0,5; 0,05 мм соответствуют величинам 500x1500; 750x1500 и 1000x2000.

Резанную ленту изготавливают толщиной 0,35; 0,50; 0,65 мм, шириной 90, 95, 107, 123, 138, 140, 150, 156, 160, 170, 175, 187, 200, 215, 226, 233, 250, 260, 280, 300, 322, 325, 360, 400, 445 и 500 мм.

Магнитные свойства стали марок 2011, 2012 и 2013 без термической обработки на магнитные свойства, а также стали марок 2111, 2112, 2211, 2212, 2311, 2312, 2411 и 2412 с термической обработкой на магнитные свойства представлены в табл. 20.8, а плотность и удельное электрическое сопротивление стали в зависимости от содержания кремния — в табл. 20.9.

Таблица 20.8

## Магнитные свойства холоднокатаной тонколистовой стали

Марка стали	Толщина, мм	Удельные потери, Вт/кг, не более		Магнитная индукция, Тл, при напряженности магнитного поля, А/м,				
		$P_{1,0/50}$	$P_{1,5/50}$	1000	2500	5000	10000	30000
2011	0,63	3,8	9,0	1,43	1,60	1,70	1,80	2,02
	0,50	3,5	8,0	1,49	1,60	1,70	1,80	2,02
2012	0,65	3,6	8,0	1,50	1,62	1,72	1,82	2,02
	0,50	2,9	6,5	1,50	1,62	1,72	1,82	2,02
2013	0,63	3,1	7,0	1,53	1,64	1,74	1,85	2,05
	0,50	2,5	5,6	1,54	1,65	1,75	1,85	2,05
2111	0,65	4,3	10,0	1,45	1,58	1,66	1,75	2,00
	0,50	3,5	8,0	1,46	1,58	1,67	1,78	2,00
2112	0,65	3,5	8,0	1,46	1,59	1,67	1,77	2,02
	0,50	2,6	6,0	1,46	1,60	1,68	1,77	2,02
2211	0,65	3,0	7,0	1,40	1,56	1,65	1,73	1,96
	0,50	2,6	5,8	1,40	1,56	1,65	1,76	2,00
2212	0,65	2,6	6,3	1,42	1,58	1,67	1,77	2,00
	0,50	2,2	5,0	1,42	1,60	1,68	1,77	2,00
2311	0,65	2,5	5,8	1,33	1,52	1,62	1,72	1,96
	0,50	1,9	4,4	1,33	1,54	1,64	1,74	1,95
2312	0,65	2,4	5,6	1,38	1,54	1,64	1,72	1,98
	0,50	1,75	4,0	1,40	1,56	1,66	1,74	1,96
2411	0,50	1,6	3,6	1,37	1,49	1,60	1,73	1,96
	0,35	1,3	3,0	1,37	1,50	1,60	1,70	1,95
2412	0,50	1,3	3,1	1,33	1,50	1,60	1,70	1,95
	0,35	1,15	2,5	1,35	1,50	1,60	1,70	1,95

Таблица 20.9

## Плотность и удельное электрическое сопротивление стали

Марки стали	Содержание кремния, %	Плотность стали, кг/м <sup>3</sup>	Удельное электрическое сопротивление, мкОм·м
2011, 2012, 2013	Менее 0,4	7850	0,14
2111, 2112	0,4...0,8	7820	0,17
2211, 2212	0,8...1,8	7800	0,25
2311, 2312	1,8...2,8	7750	0,40
2411, 2412	2,8...3,8	7650	0,50

## 20.2.4. Электротехническая холоднокатаная анизотропная тонколистовая сталь (ГОСТ 21427.1-83)

Анизотропная тонколистовая холоднокатаная сталь изготавливается следующих марок: 3411, 3412, 3413, 3414, 3415, 3416, 3404, 3405 и 3406.

Сталь изготавливают: толщиной 0,28 и 0,30 мм — с электроизоляционным термостойким покрытием; толщиной 0,35 мм — с электроизоляционным термостойким покрытием, без него и с электроизоляционным покрытием, не ухудшающим штампуемость; толщиной 0,50 мм — с электроизоляционным покрытием, не ухудшающим штампуемость, или без электроизоляционного покрытия. Коэффициент заполнения без покрытия составляет 0,97, с покрытием — в пределах 0,94...0,97.

Магнитные свойства электротехнической анизотропной тонколистовой холоднокатаной стали приведены в табл. 20.10.

Таблица 20.10

Магнитные свойства холоднокатаной анизотропной тонколистовой стали

Марка стали	Толщина, мм	Удельные потери, Вт/кг, не более			Магнитная индукция, Тл, не менее, при напряженности магнитного поля, А/м		
		$P_{1,0/50}$	$P_{1,5/50}$	$P_{1,7/50}$	100	250	2500
3411	0,50	1,10	2,45	3,20	—	—	1,76
	0,35	0,80	1,75	2,50	—	—	1,75
3412	0,50	0,95	2,10	2,80	—	—	3,85
	0,35	0,70	1,50	2,20	—	—	1,80
3413	0,50	0,80	1,75	2,50	—	—	1,85
	0,35	0,60	1,30	1,90	—	—	1,85
	0,30	—	1,19	1,75	—	—	1,85
3414	0,50	0,70	1,50	2,20	1,60	1,70	1,68
	0,35	0,50	1,10	1,60	1,60	1,70	1,88
	0,30	—	1,03	1,50	1,60	1,70	1,88
	0,28	—	1,05	1,55	—	—	1,85
3415	0,35	0,46	1,03	1,50	1,61	1,71	1,90
	0,30	—	0,97	1,40	1,61	1,71	1,90
	0,28	—	0,95	1,38	1,61	1,71	1,90
3416	0,28	—	0,89	1,30	1,61	1,70	1,90

Примечание. Для стали всех марок основными нормируемыми характеристиками являются удельные потери при магнитной индукции 1,5 Тл и магнитная индукция при напряженности магнитного поля 2500 А/м.

## 20.2.5. Лента стальная электротехническая холоднокатаная анизотропная (ГОСТ 21427.4-78)

Холоднокатаную анизотропную ленту изготавливают из стали марок 3411, 3421, 3422, 3423, 3424 и 3425.

Номинальные толщины ленты: 0,05; 0,08; 0,15; 0,20 мм, номинальная ширина: 5; 6,5; 8; 10; 12; 12,5; 15; 16; 20; 25; 28; 30; 32; 35,5; 40; 50; 64; 71; 80 мм. Лента имеет одностороннее термостойкое электроизоляционное покрытие толщиной 5 мкм.

Лента имеет электрическое сопротивление, приведенное к 1 см<sup>2</sup> поверхности, не менее 100 Ом/см<sup>2</sup>.

Магнитные свойства электротехнической анизотропной холоднокатаной ленты представлены в табл. 20.11.

Таблица 20.11

Магнитные свойства электротехнической анизотропной  
холоднокатаной ленты

Марка	Толщина, мм	Удельные потери Вт/кг, не более		Коэрцитивная сила, А/м	Магнитная индукция, Тл, при напряженности магнитного поля, А/м, не более					
		$P_{1,0/400}$	$P_{1,5/400}$		$B_{40}$	$B_{80}$	$B_{200}$	$B_{400}$	$B_{1000}$	$B_{2000}$
3421	0,20	—	—	0,28	0,50	0,85	1,10	1,35	1,45	1,70
	0,15	10,0	23,0	0,34	0,50	0,80	1,10	1,30	1,45	1,70
	0,08	10,0	22,0	0,36	0,40	0,75	1,10	1,25	1,45	1,70
	0,05	10,0	21,0	0,36	0,40	0,75	1,10	1,25	1,45	1,70
3422	0,15	9,0	20,0	0,32	0,60	0,95	1,25	1,40	1,55	1,75
	0,08	8,5	19,0	0,32	0,55	0,90	1,25	1,35	1,55	1,75
	0,05	8,5	19,0	0,36	0,55	0,90	1,25	1,35	1,55	1,75
3423	0,15	8,0	19,0	0,26	0,80	1,10	1,40	1,55	1,65	1,82
	0,08	7,5	17,0	0,28	0,80	1,05	1,40	1,50	1,65	1,82
3423	0,05	—	17,0	—	0,80	1,05	1,40	1,50	1,65	1,82
3424	0,15	—	18,0	—	0,80	1,10	1,40	1,55	1,65	1,82
	0,08	—	16,0	—	0,80	1,10	1,40	1,55	1,65	1,82
	0,05	7,5	16,0	0,32	0,80	1,10	1,40	1,55	1,65	1,82
3425	0,15	—	17,0	—	1,10	1,35	1,50	1,65	1,75	1,82
	0,08	—	15,0	—	1,05	1,30	1,50	1,65	1,76	1,82
	0,05	—	15,0	—	1,05	1,30	1,50	1,65	1,75	1,82
3411		$P_{1,5/50}$	$P_{1,7/50}$							
	0,20	1,6	2,2	0,28	0,50	0,85	1,10	1,35	1,45	1,70

### 20.2.6. Сталь электротехническая анизотропная холоднокатаная с пониженным уровнем магнитных потерь марок 3406 и 3407 (ТУ 14-1-2937-80)

Электротехническую сталь изготавливают в рулонах шириной 750 мм, толщиной 0,30 мм. Коэффициент заполнения — не менее 0,96.

Удельные потери стали марки 3406 составляют  $p_{1,7/50} = 1,34$  Вт/кг, а стали марки 3407  $p_{1,7/50} = 1,26$  Вт/кг.

### 20.2.7. Сталь сортовая электротехническая нелегированная

Сортовая электротехническая нелегированная сталь изготавливается следующих марок: 10864, 20864, 10880, 20880, 10895, 20895, 11864, 21864, 11880, 21880, 11895, 21895.

Цифры в обозначении марки означают:

— первая цифра — класс по виду обработки (1 — горячекатаная и кованая, 2 — калиброванная);

— вторая цифра — тип по содержанию кремния и коэффициенту старения (0 — сталь нелегированная без нормирования коэффициента старения; 1 — сталь нелегированная с заданным коэффициентом старения);

— третья цифра — группу по основной нормируемой характеристике (8 — коэрцитивная сила);

— четвертая и пятая — количественное значение основной нормируемой характеристики (коэрцитивной силы в целых единицах А/м).

Коэффициент старения — процент увеличения коэрцитивной силы после старения, для указанных марок он не превышает 10%.

Магнитные свойства сортовой электротехнической нелегированной стали приведены в табл. 20.12.

Таблица 20.12

Магнитные свойства сортовой электротехнической нелегированной стали

Марки	Коэрцитивная сила в разомкнутой цепи, А/м, не более	Магнитная индукция, Тл, не менее, при напряженности магнитного поля, А/м, в замкнутой цепи		
		500	1000	2500
10895, 20895, 11895, 21895	95	1,32	1,45	1,54
10880, 20880, 11880, 21880	80	1,36	1,47	1,57
10864, 20864, 11864, 21864	64	1,40	1,50	1,60

### 20.3. Магнитомягкие прецизионные сплавы (пермаллои)

К магнитомягким прецизионным сплавам, или пермаллоям, относятся нелегированные и легированные двойные железоникелевые, железокобальтовые и железохромистые и тройные железоникелькобальтовые сплавы с высокой магнитной проницаемостью и малой коэрцитивной силой. Пермаллои представляют собой железоникелевые сплавы с содержанием никеля от 36 до 80%. Для улучшения характеристик магнитомягких прецизионных сплавов — пермаллоев в их состав включают также кобальт, хром, молибден, медь и другие металлы.

Важной особенностью пермаллоев в сравнении с электротехническими сталями являются их легкая намагничиваемость в слабых магнитных полях и повышенные значения удельного электрического сопротивления. Благодаря этим свойствам и стабильности магнитных характеристик пермаллои могут применяться до частот 200...500 кГц. Кроме того, пермаллои исключительно пластичны, их прокатывают в листы и ленты толщиной до 0,0015 мм.

Сплавы выпускаются преимущественно в виде горячекатаных и холоднокатаных лент толщиной от 0,0015 до 2,5 мм, шириной от 20 до 250 мм, а также в виде листов толщиной от 3 до 22 мм, шириной от 450...600 и длиной до 800 мм. Выпускаются кованные и горячекатаные прутки диаметром 8...13 мм и длиной 1000 мм; диаметром 13...80 мм и длиной 500 мм; диаметром 80...100 мм и длиной 250 мм.

Следует отметить, что пермаллои очень чувствительны к деформациям, которые вызывают ухудшение их первоначальных магнитных характеристик. Восстановление первоначального уровня магнитных характеристик деформированных пермаллоидных деталей достигается специальной термической обработкой.

Марки и основные свойства прецизионных магнитомягких сплавов приведены в табл. 20.13.

Таблица 20.13  
Марки и основные свойства прецизионных магнитомягких сплавов  
(пермаллоев)

Группа	Марки	Основные свойства
1	79НМ, 80НХС, 81НМА, 83НФ	Наивысшая магнитная проницаемость в слабых полях
2	50НХС	Высокая магнитная проницаемость и повышенное удельное электрическое сопротивление

Группа	Марки	Основные свойства
3	45Н, 50Н	Повышенная магнитная проницаемость и повышенная индукция технического насыщения
4	50НП, 68НМП, 34НКМП, 35НКСП, 40НКМП, 79НМП, 77НМДП, 65НП	Прямоугольная петля гистерезиса. Сплавы обладают анизотропией магнитных свойств
5	27КХ, 49КФ, 49К2Ф, 49К2ФА	Высокая магнитная индукция технического насыщения
6	47НК, 47НКХ, 64Н, 40НКМ	Низкая остаточная магнитная индукция и постоянство магнитной проницаемости. Сплавы обладают анизотропией магнитных свойств
7	79НЗМ, 68НМ	Высокая магнитная проницаемость при однополярном намагничивании. Сплавы обладают анизотропией магнитных свойств
8	16Х, 36КНМ	Высокая коррозионная стойкость

Кривые намагничивания некоторых магнитомягких сплавов — пермаллоев приведены на рис. 20.2.

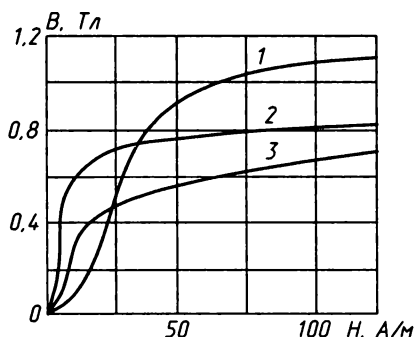


Рис. 20.2. Кривые намагничивания магнитомягких сплавов: 1 — пермаллой с 45% никеля; 2 — пермаллой молибденовый; 3 — пермаллой хромистый

Основные физические свойства прецизионных магнитомягких сплавов приведены в табл. 20.14, магнитные свойства некоторых марок пермаллоев — в табл. 20.15.

Таблица 20.14  
Основные физические свойства прецизионных магнитомяких сплавов (пермаллоев)

Марка	Плотность, кг/м³	Удельное электрическое сопротивление, мкОм·м	Температура точки Кюри, °С	Магнитострикция на насыщении, 10⁶	Твердость по Бринеллю	Предел прочности, МПа	Предел текучести, МПа	Модуль нормальной упругости E, ГПа	Относительное удлинение, %
79НМ	8600	0,55	430	2	210/120	1050/500	1000/150	210	3/50
80НХС	8500	0,62	330	—	240/130	950/550	900/150	—	4/40
83НФ	8700	0,70	360	0,5	—	950/500	—/150	220	2/45
81НМА	8700	0,80	260	0,5	260/160	1300/650	1250/250	210	2/50
50НХС	8200	0,90	360	—	190/125	900/500	850/150	—	2/40
45Н	8200	0,54	450	25	170/130	750/-	750/-	200	3/—
50Н	8200	0,45	500	25	170/130	800/150	700/150	160	3/35
50НП	8200	0,45	500	—	170/130	800/450	700/150	160	3/35
68НПМ	8400	0,45	580	—	230/120	950/550	—/150	—	3/50
34НМКП	8500	0,50	580	—	155/130	950/550	900/-	—	4/40
35НХСХП	8400	0,60	560	12	170/130	900/550	900/150	170	4/40
40НМКП	8550	0,55	580	20	—/100	1000/550	1000/150	180	4/50
65НП	8350	0,25	600	—	200/130	900/550	900/150	190	3/40
77НМДП	8600	0,55	350	—	230/110	1000/550	1000/150	—	2/40
27КХ	7980	0,20	940	35	—	1100/600	—/300	220	2/20
49К2ФА	8150	0,40	960	60...100	—	1350/500	—/350	220	1/1
47НК	8400	0,20	700	14	160/130	900/500	—/150	200	3/40
47НХХ	8350	0,48	600	—	170/130	900/500	—	—	3/35
64Н	8350	0,20	600	20 2 25	200/120	900/550	900/150	190	3/40
79НЗМ	8600	0,50	460	—	210/120	1050/500	1000/150	240	3/50
16Х	7750	0,44	680	—	185/—	400/250	—/200	220	5/25
36КНМ	8200	0,48	570	—	170/—	—/500	—/250	—	—/45

Примечание. Значения механических свойств, указанных в числителе, определялись для ленты в нагартованном состоянии; в знаменателе — после термической обработки.

Таблица 20.15

## Магнитные свойства некоторых марок пермаллоев

Марка и вид изделия	Толщина, диаметр, мм	Магнитные характеристики при 20 °С				
		Начальная магнитная проницаемость	Максимальная магнитная проницаемость	Коэрцитивная сила, А/м, не более	Индукция насыщения, Тл, не менее	$B_r/B_m$ при $H=800$ А/м
45Н						
Ленты холоднокатанные	0,02...0,04	1700	16000	32	1,5	—
	0,05...0,08	1800	18000	24		
	0,1...0,18	2000	20000	24		
	0,2...0,3	2500	23000	20		—
	0,35...2,5	2800	25000	16		—
Листы горячекатанные	3...22	2000	18000	24	1,5	
Прутки	8...10	2000	18000	24	1,5	
50Н						
Ленты холоднокатанные	0,02...0,04	1800	20000	24		
	0,05...0,08	2000	20000	20	1,5	—
	0,1...0,18	2300	25000	16		
	0,2...0,3	2600	30000	12		
	0,35...0,5	3000	35000	10		
	0,55...1	3000	30000	12		
	1,1...2,5	2800	25000	13		
Листы горячекатанные	3...22	2500	20000	24	1,5	
Прутки	8...100	2500	20000	24	1,5	
50Н-У						
Ленты холоднокатанные	0,1...0,18	3000	30000	14	1,5	—
	0,2...0,3	3500	35000	12		
	0,35...0,5	4000	45000	10		
	0,55...1	4000	40000	10		
	1,1...2,5	3000	35000	12		
50НП						
Ленты холоднокатанные	0,02	1000	35000	20	1,5	0,85
	0,05	1000	35000	18		
50НП-У						
Ленты холоднокатанные	0,02	1000	40000	16	1,5	0,9
	0,05	1000	50000	11		
60НП						
Ленты холоднокатанные	0,02...0,04	1500	70000	6,4		
	0,05...0,08	2000	100000	3,2	1,3	0,9
	0,1...0,18	2000	200000	2,8		
	0,20...0,30	2000	250000	2,4		
	0,35...0,5	2000	300000	2,4		

Продолжение табл. 20.15

Марка и вид изделия	Толщина, диаметр, мм	Магнитные характеристики при 20 °С				
		Начальная магнитная проницаемость	Максимальная магнитная проницаемость	Коэффициентная сила, А/м, не более	Индукция насыщения, Тл, не менее	$B_H/B_M$ при $H=800$ А/м
<b>34НКМП</b>						
Ленты холоднокатанные	0,02...0,04	1000	40000	16	1,5	0,9
	0,05...0,08	1500	60000	12		0,87
	0,1...0,18	2000	100000	8		0,85
	0,2...0,5	3000	120000	6,4		0,85
<b>50НХС</b>						
Ленты холоднокатанные	0,02...0,04	1500	15000	20	1,0	—
	0,05...0,08	2000	20000	16		—
	0,1...0,18	2500	25000	13		—
	0,2...0,3	3000	28000	10		—
	0,35...0,5	3200	30000	8		—
	0,55...1	3000	20000	10		—
<b>Т9НМ</b>						
Ленты холоднокатанные	0,02...0,04	16000	70000	4	0,75	—
	0,05...0,08	16000	90000	3,2		—
	0,1...0,18	20000	120000	2,4		—
	0,2...0,3	22000	130000	1,6		—
	0,35...1	25000	150000	1,6		—
	1,1...2,5	22000	130000	1,6		—
Листы горячекатанные	3...22	20000	800000	3,2		
Прутки	8...10	20000	80000	3,2		
<b>79НМ-У</b>						
Ленты холоднокатанные	0,02...0,04	20000	100000	2,4	0,73	—
	0,05...0,08	20000	120000	1,6		—
	0,1...0,18	22000	150000	1,2		—
	0,2...0,3	25000	180000	1,2		—
	0,35...1,0	30000	220000	1,0		—
	1,1...2,5	25000	180000	1,2		—
<b>80НХС</b>						
Ленты холоднокатанные	0,02...0,04	18000	70000	4	0,65	—
	0,05...0,08	20000	90000	3,2		—
	0,1...0,18	22000	120000	2,4		—
	0,2...0,3	28000	130000	1,5		—
	0,35...0,5	35000	150000	1,2		—
	0,55...1	30000	170000	1		—
	1,1...2,5	25000	150000	1,2		—
Ленты горячекатанные	3...22	20000	70000	3,2	0,65	
Прутки	8...100	20000	70000	3,2	0,65	

Марка и вид изделия	Толщина, диаметр, мм	Магнитные характеристики при 20 °С				
		Начальная магнитная проницаемость	Максимальная магнитная проницаемость	Коэрцитивная сила, А/м, не более	Индукция насыщения, Тл, не менее	$B_r/B_m$ при $H=800$ А/м
76НХД Ленты холоднокатаные	0,02...0,04	10000	50000	5,2	0,75	—
	0,05...0,08	13000	100000	2,4		
	0,1...0,18	15000	120000	2		
	0,2...0,3	18000	150000	1,6		

## 20.4. Магнитомягкие аморфные и нанокристаллические сплавы ГАММАМЕТ

### 20.4.1. Особенности технологии и конструкции

В последние годы в России используются магнитомягкие сплавы ГАММАМЕТ с нанокристаллической либо аморфной структурой, выпускаемые Научно-производственным предприятием «Гаммамет» (г. Екатеринбург). Магнитопроводы ГАММАМЕТ изготавливают из аморфной ленты толщиной 20...25 мкм, полученной из сплавов на основе железа или кобальта [22].

Магнитопроводы обладают высокой магнитной проницаемостью, низкими магнитными потерями, высокой запасенной магнитной энергией и могут в частотной области до 1 МГц полностью заменить традиционные магнитопроводы из электротехнической стали, железоникелевых сплавов (пермаллоев), ферритов, прессованного порошкообразного пермаллоя и альсифера (магнитодиэлектрики).

Температура окружающей среды от -60 до +125 °С при относительной влажности до 100% при 35 °С.

Полный срок службы магнитопровода — 30 лет.

Магнитопроводы ГАММАМЕТ используются для производства измерительных трансформаторов тока и напряжения, силовых, согласующих, импульсных, сигнальных, широкополосных трансформаторов, накопительных реакторов и трансформаторов, сглаживающих и токоограничивающих реакторов и др.

*Получение сплавов.* Магнитопроводы относятся к числу новых электротехнических материалов, поэтому приведем краткое описание технологии их получения.

Аморфную ленту получают путем разливки металлического расплава заданного химического состава на участок поверхности вращающегося бронзового диска, перемещающийся с линейной скоростью около 25 м/с. В результате резкого охлаждения со скоростью до  $10^6$  °C/с металлический расплав не успевает кристаллизироваться, полученная лента имеет аморфную структуру, аналогичную структуре стекла.

После термической обработки структура ленты может остаться аморфной, либо частично кристаллизованной, либо нанокристаллической. В материале с нанокристаллической структурой кристаллиты расположены по всему объему ленты и имеют размер около 10 нм. Поэтому такие материалы называют нанокристаллическими.

Частичную кристаллизацию получают прерыванием процесса на начальной стадии термической обработки. Из-за плотной упаковки атомов кристаллизованный материал занимает меньший объем, чем этот же материал с аморфной структурой. В результате поверхностные слои толщиной не более 1 мкм, в которых вырастают кристаллиты на начальной стадии, сжимают центральный слой ленты с аморфной структурой. Такая слоеная структура ленты (кристаллическая — аморфная — кристаллическая) обеспечивает линейность кривой намагничивания материала.

*Маркировка сплавов.* Маркировка сплавов включает сокращенное наименование товарного знака ГМ и три цифры, которые определяют химический состав сплава: первая цифра — основной элемент (4 — железо, 5 — кобальт), вторая и третья цифры — код химического состава сплава. Например, ГМ501 — магнитомягкий сплав на основе кобальта.

Магнитопроводы получают намоткой аморфной ленты на оправки разных форм и размеров и последующей термической обработкой. Термическая обработка может проводиться в магнитном поле или без него. Магнитные свойства магнитопроводов существенно зависят от вида обработки, включая направление магнитного поля.

Все магнитные материалы под действием механических напряжений изменяют магнитные свойства, и наоборот, в магнитном поле они претерпевают деформацию (явление магнитострикции). Для сохранения высоких магнитных свойств магнитопровода после отжига его помещают в защитный пластиковый контейнер и заливают вязким компаундом (рис. 2,3,а). Компаунд 3 предохраняет магнитопровод 1 от ударов и сме-

щения внутри контейнера 2. В качестве компаунда используют материалы, не ухудшающие магнитных свойств магнитопроводов.

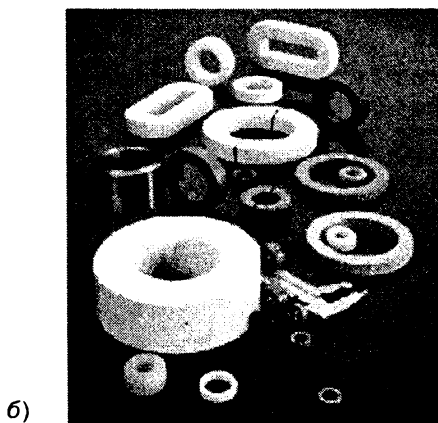
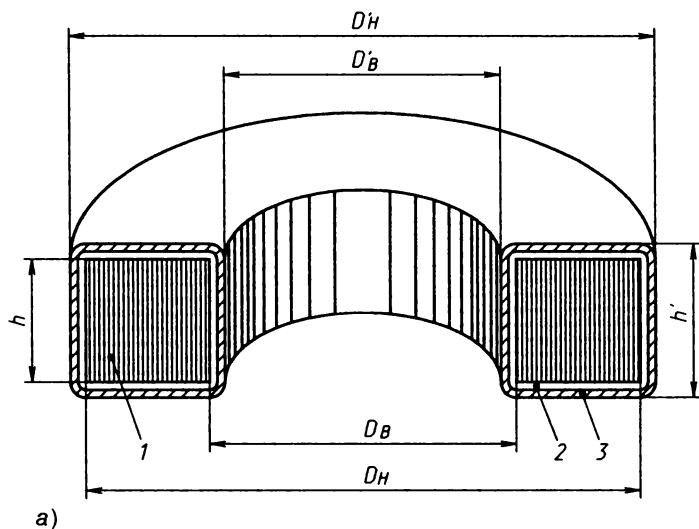


Рис. 20.3. Конструкция магнитопровода (а) и общий вид изделий (б)  
 1 — ленточный магнитопровод; 2 — демпфирующий наполнитель;  
 3 — защитный контейнер

Общий вид некоторых магнитопроводов ГАММАМЕТ представлен на рис. 20.3,б.

Магнитопроводы в защитных контейнерах имеют кольцевую форму, а их размеры соответствуют ряду типоразмеров ОЛ по ГОСТ 24011-80. Типоразмеры наиболее распространенных магнитопроводов ГАММАМЕТ в защитных контейнерах представлены в табл. 20.16.

Таблица 20.16

Типоразмеры магнитопроводов ГАММАМЕТ в защитных контейнерах

Магнитопровод	Размеры магнитопровода, мм			Размеры контейнера, мм			Средняя длина магнитного пути L, см	Действующее сечение*, см <sup>2</sup>	Объем, см <sup>3</sup>
	$D_H$	$D_B$	$h$	$D'_H$	$D'_B$	$h'$			
ОЛ15/25-10	25	15	10	29	12,5	13,5	6,3	0,35	2,21
ОЛ20/32-10	32	20	10	34	17,5	13,5	8,2	0,42	3,44
ОЛ28/45-10	45	28	10	50	23,3	15,3	11,5	0,6	6,9
ОЛ40/64-20	64	40	20	69	36	26	16,3	1,68	27,4
ОЛ40/64-30	64	40	30	70	36	36,5	16,3	2,52	41,1
ОЛ135/170-20	170	135	20	178	117	26,5	47,9	2,45	117
ОЛ140/200-35	200	140	35	208	135	39,5	53,4	7,35	392

\* Действующее сечение равно геометрическому, умноженному на коэффициент заполнения 0,7.

Пример обозначения: ОЛ20/32-10 — ленточный кольцевой магнитопровод с наружным диаметром 32, внутренним — 20 и высотой 10 мм. Как видно из табл. 20.16, указанные цифры в обозначении соответствуют размерам магнитопровода, а не контейнера, в котором он помещен.

Средняя линия кольцевого магнитопровода определяется обычным образом:

$$L = \pi (D_H + D_B) / 2.$$

#### 20.4.2. Магнитные свойства магнитопроводов ГАММАМЕТ в защитных контейнерах

Маркировка магнитопровода ГАММАМЕТ в защитном контейнере состоит из обозначения магнитного сплава, из которого изготовлен магнитопровод, и буквы А или В. Буквы характери-

зуют условия термической обработки: А — отжиг в продольном магнитном поле (вдоль магнитного пути магнитопровода), В — отжиг в поперечном магнитном поле (перпендикулярно торцевой поверхности магнитопровода и вдоль поверхности ленты). Если дополнительной буквы в маркировке магнитопровода нет, то это означает, что он отожжен без магнитного поля.

Магнитные свойства магнитопроводов ГАММАМЕТ приведены в табл. 20.17. Все характеристики в таблице указаны для температуры 25 °С.

В табл. 20.17 приняты следующие обозначения:

$B_s$  — магнитная индукция насыщения;

$\mu_{\text{нач}}$  — начальная относительная магнитная проницаемость;

$\mu_{\text{max}}$  — максимальная относительная магнитная проницаемость;

$K_n$  — коэффициент прямоугольности статической петли гистерезиса  $K_n = B_r / B_s$ , где  $B_r$  — остаточная магнитная индукция;  $B_s$  — магнитная индукция насыщения;

$H_c$  — статическая коэрцитивная сила;

$P_{0,2/20}$  — удельные магнитные потери, измеренные при максимальной магнитной индукции  $B_m = 0,2$  Тл и частоте  $f = 20$  кГц;

$P_{0,05/100}$  — удельные магнитные потери, измеренные при максимальной магнитной индукции  $B_m = 0,05$  Тл и частоте  $f = 100$  кГц.

Материал магнитопроводов ГМ501, ГМ503А, ГМ503В, ГМ440А, ГМ440В, ГМ515А и ГМ515В после термической обработки имеет аморфную структуру, а материал магнитопроводов ГМ414, ГМ412А и ГМ412В — нанокристаллическую структуру.

При расчете электромагнитных компонентов, в которых использованы магнитопроводы в защитных контейнерах, необходимо учитывать коэффициент заполнения магнитопровода магнитным материалом, равный 0,7 для ленты толщиной 20...30 мкм.

Удельное электрическое сопротивление материала магнитопроводов находится в пределах от  $1,2 \cdot 10^{-6}$  до  $1,4 \cdot 10^{-6}$  Ом·м.

### 20.4.3. Магнитные свойства магнитопроводов ГАММАМЕТ типа ДС

Магнитопроводы типа ДС отличаются тем, что обладают жесткой конструкцией и не имеют защитного контейнера. Механические факторы на магнитные свойства такого магнитопровода воздействуют слабее. Дополнительную жесткость магнитопроводу придает наружное покрытие толщиной от 0,4 до 1,2 мм из полимерных изоляционных материалов, выдерживающее напряжение не менее 5 кВ.

Таблица 20.17  
Типичные магнитные свойства магнитопроводов ГАММАМЕТ в защитном контейнере

Магнито- провод	$B_e$ , Тл	$\mu_{нчч}$	$\mu_{max}$	$K_n$	$H_C$ , А/м	$P_{0,2/20}$ , Вт/кг	$P_{0,05/100}$ , Вт/кг	Температу- ра Кюри, °С	Плотность, кг/м³	Магнито- стрикция насыщения
ГМ501	0,43	150000	600000	0,6	0,15	3,6	3,6	150	7700	$<0,2 \cdot 10^{-6}$
ГМ503А	0,58	5000	1500000	0,92	0,2	8,5	10	260	7700	$<0,2 \cdot 10^{-6}$
ГМ503В	0,58	40000	50000	0,04	0,25	2,6	2,8	260	7700	$<0,2 \cdot 10^{-6}$
ГМ414	1,15	60000	300000	0,6	1	4,5	4,3	600	7400	$1,5 \cdot 10^{-6}$
ГМ412А	1,12	10000	600000	0,9	1,2	10	11	610	7400	$1 \cdot 10^{-6}$
ГМ412В	1,12	30000	45000	0,05	1,2	3	3,5	610	7400	$1 \cdot 10^{-6}$
ГМ440А	1,5	1000	200000	0,9	4	30	45	420	7300	$25 \cdot 10^{-6}$
ГМ440В	1,5	8000	20000	0,05	4	8	5	420	7300	$25 \cdot 10^{-6}$
ГМ515А	0,95	150	250000	0,95	2	60	90	500	7900	$<0,2 \cdot 10^{-4}$
ГМ515В	0,95	1500	1550	$<0,1$	1,5	12	13	500	7900	$<0,2 \cdot 10^{-4}$

Типичные магнитные свойства магнитопроводов ГАММАМЕТ® типа ДС

Магнитопровод	$B_6$ , Тл	$\mu_{нач}$	$\mu_{max}$	$K_n$	$H_C$ , А/м	$P_{0,220}$ , мВт/см <sup>3</sup>	$P_{0,05/100}$ , мВт/см <sup>3</sup>	Температура Кори, °С	Плотность, кг/м <sup>3</sup>	Магнитострикция на сжатия
ГМ11ДС	0,32	50000	150000	0,5	0,4	35	35	160	5400	$<0,2 \cdot 10^{-6}$
ГМ14ДС	0,8	20000	50000	0,4	2,5	70	60	600	5200	$1,5 \cdot 10^{-6}$
ГМ40ДС-2000	1	2000	2000	0,3	10	240	200	420	5100	$25 \cdot 10^{-6}$
ГМ40ДС-1500	1	1500	2200	0,06	12	250	210	420	5100	$25 \cdot 10^{-6}$
ГМ40ДС-1000	1	1000	1300	0,06	16	280	240	420	5100	$25 \cdot 10^{-6}$
ГМ40ДС-700	1	700	850	0,05	20	840	130	420	5100	$25 \cdot 10^{-6}$
ГМ40ДС-500	1	500	600	0,05	30	330	285	420	5100	$25 \cdot 10^{-6}$
ГМ40ДС-350	1	350	500	0,1	40	350	300	420	5100	$25 \cdot 10^{-6}$
ГМ54ДС-1000	0,8	1000	1100	$<0,01$	3	100	80	600	5200	$1,5 \cdot 10^{-6}$
ГМ54ДС-700	0,8	700	760	$<0,01$	3	120	90	600	5200	$1,5 \cdot 10^{-6}$
ГМ54ДС-500	0,8	500	540	$<0,01$	3	130	100	600	5200	$1,5 \cdot 10^{-6}$
ГМ54ДС-350	0,8	350	370	$<0,01$	3	150	110	600	5200	$1,5 \cdot 10^{-6}$
ГМ54ДС-250	0,8	250	260	$<0,01$	3	180	130	600	5200	$1,5 \cdot 10^{-6}$
ГМ54ДС-140	0,8	140	150	$<0,01$	3	210	160	600	5200	$1,5 \cdot 10^{-6}$

Окончание табл. 20.18

Магнитопровод	$B_s, \text{Тл}$	$I_{\text{нкл}}$	$I_{\text{мах}}$	$K_n$	$H_C, \text{А/м}$	$P_{0,220}, \text{мВт/см}^3$	$P_{0,05100}, \text{мВт/см}^3$	Температура Кюри, °С	Плотность, кг/м³	Магнитострикция на- пряжения
ГМ54ДС-90	0,8	90	96	<0,01	3	270	200	600	5200	$1,5 \cdot 10^{-6}$
ГМ54ДС-60	0,8	60	64	<0,01	4	350	260	600	5200	$1,5 \cdot 10^{-6}$
ГМ54ДС-30	0,8	30	31	<0,01	4	510	390	600	5200	$1,5 \cdot 10^{-6}$
ГМ54Р-20	0,45	20	20	<0,01	—	850	420	600	5200	$1,5 \cdot 10^{-6}$
ГМ32ДС	0,75	7000	20000	0,88	2	130	160	610	5200	$1 \cdot 10^{-6}$
ГМ33ДС	0,4	3000	600000	0,9	0,5	100	130	260	5400	$<0,2 \cdot 10^{-6}$
ГМ35ДС	0,7	200	150000	0,92	2	560	900	500	5400	$<0,2 \cdot 10^{-6}$
ГМ42ДС	0,75	20000	25000	0,1	2	80	80	610	5200	$<1 \cdot 10^{-6}$
ГМ43ДС	0,4	35000	40000	0,05	0,5	75	70	260	5400	$<0,2 \cdot 10^{-6}$
ГМ45ДС	0,7	1200	1250	<0,01	2	220	250	500	5400	$<0,2 \cdot 10^{-6}$
ГМ40ВДС	1	3000	7000	0,15	8	150	120	420	5100	$25 \cdot 10^{-6}$

Принята следующая система обозначений магнитопроводов типа ДС. После сокращенного наименования товарного знака — ГМ следуют две цифры: первая обозначает группу по основной магнитной характеристике и соответствующую ей область применения; вторая — указывает на химический состав сплава, буква Д — на наличие внешнего изоляционного покрытия на магнитопроводе, буква С — на межвитковую пропитку.

Типичные магнитные свойства магнитопроводов ДС, отнесенные к единице объема, представлены в табл. 20.18. В ней приняты те же обозначения, что и в табл. 20.17.

Типоразмеры магнитопроводов типа ДС находятся в пределах от 5 мм для внутреннего диаметра до 600 мм для наружного. Форма магнитопровода может быть кольцевой или прямоугольной. Коэффициент заполнения магнитопровода магнитным материалом принимают равным 1.

Сравнение магнитных свойств показывает, что магнитопроводы ГАММАМЕТ почти по всем параметрам превосходят традиционные магнитные материалы. В табл. 20.19 приведены рекомендации по замене традиционных магнитных материалов магнитопроводами ГАММАМЕТ.

Таблица 20.19

Рекомендации по замене традиционных магнитных материалов магнитопроводами ГАММАМЕТ

Магнитопроводы из традиционных магнитных материалов	Магнитопроводы ГАММАМЕТ
Пермаллой 79НМ, 80НХС, 81НМА	ГМ501, ГМ414, ГМ11ДС, ГМ14ДС
Ферриты 700НМ, 1000НМ, 1500НМ, 2000НМ, 2500НМС, 3000НМ, 6000НМ	ГМ414, ГМ14ДС, ГМ40ДС
Прецизионный сплав 50НП, феррит 108П	ГМ503А, ГМ412А, ГМ440А
Прецизионный сплав 47НК	ГМ503В, ГМ412В, ГМ440В, ГМ40ДС-1000, ГМ40ДС-1500, ГМ54ДС-1000
Магнитоэлектрики МП250, МП140, МП90, МП60, ТЧ-60, ТЧК-55, ВЧ-32	ГМ54ДС, ГМ24ДС
Анизотропная электротехническая сталь толщиной 0,08 и 0,30 мм	ГМ414, ГМ14ДС, ГМ40ДС*

\* При частоте 400 Гц и более.

## 20.5. Ферриты

Ферриты представляют собой неметаллические магнитные материалы на основе твердых растворов оксида железа с оксидами других металлов. Различают ферриты *магнитомягкие* и *магнитотвердые*. Ферриты по своей структуре — вещества поликристаллического строения. Их получают в результате спекания порошков различных окислов металлов при температурах 1100...1300 °С.

Плотность ферритов находится в пределах 3000...5000 кг/м<sup>3</sup>. Большой плотности ферритов соответствуют лучшие магнитные характеристики. Удельное сопротивление ферритов — в пределах от  $5 \cdot 10^3$  до  $1 \cdot 10^{11}$  Ом·м. Температура Кюри у ферритов составляет 450...550 °С.

Поскольку потери на вихревые токи у ферритов незначительны, их применяют в магнитных полях высокой частоты. Предельная частота, при которой происходит резкое увеличение потерь, называется *граничной частотой*. Величины начальной и максимальной магнитной проницаемости ферритов стабильны в широком диапазоне частот.

По числу окислов различают простые и сложные ферриты. Простые ферриты содержат окись железа и окись другого металла. Простые ферриты: цинковый (феррит цинка), марганцевый (феррит марганца) и др. Сложные (смешанные) ферриты обладают более высокими значениями магнитных характеристик и большим удельным сопротивлением по сравнению с простыми ферритами. Примеры сложных ферритов: никель-цинковый феррит, марганец-цинковый феррит.

Магнитомягкие ферриты: никель-цинковые, марганец-цинковые, литий-цинковые, магний-марганцевые и др.

Магнитотвердые ферриты: феррит бария, феррит кобальта и феррит стронция.

Магнитотвердые ферриты обладают резко выраженной прямоугольной гистерезисной петлей, что позволяет использовать их в элементах логической автоматики.

Из магнитотвердых ферритов путем их сухого или мокрого прессования в сильных магнитных полях получают постоянные магниты, отличающиеся низким удельным весом, низкой стоимостью, высокой коррозионной стойкостью, возможностью создания магнитных систем с большим немагнитным зазором.

На рис. 20.4 представлены кривые намагничивания ферритов. В табл. 20.20 и 20.21 приводятся основные характеристики наиболее широко применяемых магнитомягких и магнитотвердых ферритов.

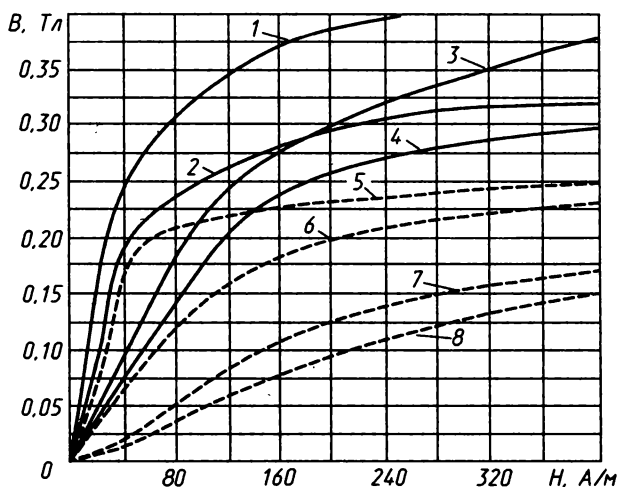


Рис. 20.4. Кривые намагничивания марганец-цинковых и никель-цинковых ферритов: 1 — 4000НМ; 2 — 3000НМ; 3 — 2000НМ; 4 — 1000НМ; 5 — 2000НН; 6 — 600НН; 7 — 400НН; 8 — 200НН

Таблица 20.20

Характеристики магнитомягких ферритов

Марка феррита	Начальная магнитная проницаемость	Остаточная индукция, Тл	Коэрцитивная сила, А/м	Граничная частота, МГц	Удельное электрическое сопротивление, Ом·м	Рабочая температура, °С, не более	Примечания
6000НМ	1000	0,11	8	0,2	5000	110	Марганец-цинковые ферриты. Применяются в слабых магнитных полях
4000НМ	4000	0,13	8	0,2	5000	110	
3000НМ	3000	0,15	12	0,3	5000	110	
2000НМ	2000	0,14	16	0,6	5000	180	
2000НМ1	2000	0,14	16	0,6	5000	180	
2000НМ2	2000	0,14	16	0,6	5000	180	
1500НМ	1500	0,14	16	0,8	5200	180	
1500НМ1	1500	0,14	16	0,8	5200	180	
1500НМ2	1500	0,14	16	1	5200	180	
1000НМ	1000	0,11	28	1	5000	180	
2000НН	2000	0,12	8	0,2	$1 \cdot 10^3$	70	Никель-цинковые ферриты. Применяются в слабых магнитных полях
600НН	600	0,14	32	1	$1 \cdot 10^4$	110	
400НН	400	0,12	64	2	$1 \cdot 10^5$	120	
200НН	200	0,1	120	3	$1 \cdot 10^5$	120	
200НН1	200	0,1	112	20	$1 \cdot 10^5$	300	
100НН	100	0,19	50	40	$1 \cdot 10^5$	300	
100НН1	100	0,1	123	45	$1 \cdot 10^5$	150	

Таблица 20.21

## Характеристики магнитотвердых ферритов

Марка феррита	Состав и структура феррита	Магнитные характеристики		
Ферриты бария				
0,7БИ	Изотропная	112...128	0,18...0,21	2800...3200
1БИ	Изотропная	128...144	0,19...0,22	3200...4400
2БА	Анизотропная	184...230	0,3...0,35	8000...11600
2БА-1	Анизотропная	195...239	0,28...0,33	7150...9950
3БА	Анизотропная	128...183	0,36...0,4	12000...14000
3БА-1	Анизотропная	264...270	0,37...0,42	11500...12000
Ферриты кобальта				
1,5ФК	Анизотропная	127...151	0,24...0,27	5500...6750
2ФК	Анизотропная	127...160	0,28...0,32	7150...8750
Ферриты стронция				
3СА	Анизотропная	240...270	0,34...0,38	10350...13100
3,5СА	Анизотропная	160...230	0,38...0,41	13900...15900

## 20.6. Магнитотвердые материалы

Магнитотвердыми называют материалы, обладающие высокими значениями коэрцитивной силы  $H_c$  ( $5 \cdot 10^3 \dots 5 \cdot 10^6$  А/м), большой остаточной индукцией  $B_s$  и, следовательно, высокими значениями магнитной энергии ( $0,5 \dots 200$  кДж/м<sup>3</sup>). Из магнитотвердых материалов изготавливают постоянные магниты, магнитные системы и изделия: роторы и статоры электрических машин, магнитные системы для аппаратов, измерительных приборов и т. д.

К магнитотвердым материалам относятся:

1) железо-никель-алюминиевые нековкие сплавы дисперсионного твердения — литые магниты;

2) ковкие сплавы на основе железа, кобальта и ванадия или на основе железа, кобальта, молибдена;

3) сплавы, закаливаемые на мартенсит (стали, легированные хромом, вольфрамом или кобальтом);

4) сплавы с очень большой коэрцитивной силой на основе благородных металлов: платина—железо, серебро—марганец—алюминий и др.;

5) металлокерамические материалы, получаемые прессованием порошкообразных компонентов с последующим обжигом отпрессованных изделий (магнитов);

6) магнитотвердые ферриты;

7) металлопластические материалы, получаемые из пресованных порошков магнитотвердого материала и связующего вещества — синтетических смол;

8) магнитоэластичные материалы (магнитоэласты), состоящие из порошка магнитотвердого материала и эластичного связующего (каучук, резина).

### 20.6.1. Железо-никель-алюминиевые нековкие сплавы дисперсионного твердения — литые магниты

Основными компонентами этих материалов являются железо (до 70%), алюминий (до 14%), никель (до 25%), медь (до 4%), кобальт (до 42%), титан (до 9%). Металлы обозначаются в марках следующими буквами: Ю — алюминий, Н — никель, Д — медь, К — кобальт, Т — титан, С — кремний, Б — ниобий. Цифры после букв означают содержание металла в %. Кристаллическая структура сплава обозначается буквой А — столбчатая равноосная, АА — монокристаллическая. Например, сплав марки ЮН14ДК25БА означает, что он содержит алюминий, никель (14%), медь, кобальт (25%), ниобий и имеет столбчатую кристаллическую структуру.

Литые магнитотвердые материалы отличаются температурной и временной стабильностью, механической прочностью, точностью геометрических размеров и высоким качеством поверхности магнитов, высокими рабочими температурами эксплуатации. Литые магниты изготовляют любой конфигурации с массой от долей грамма до килограмма.

Основные магнитные характеристики литых магнитов приведены в табл. 20.22.

Таблица 20.22  
Основные магнитные характеристики литых магнитов

Марки	Максимальная магнитная энергия, кДж/м <sup>3</sup> , не менее,	Коэрцитивная сила по индукции, кА/м, не менее	Остаточная индукция В <sub>r</sub> , Тл, не менее	Отношение В/Н в точке максимума 10 <sup>-3</sup> Тл/(кА·м)
ЮНД4	3,6	40	0,50	12...16
ЮНД8	5,1	44	0,60	13...16
ЮНТС	4,0	58	0,43	7...10
ЮНДК15	6,0	48	0,75	15...18
ЮНДК18	9,7	55	0,90	15...20
ЮНДК18С	14	44	1,10	22...28
ЮН13ДК24С	18	36	1,30	30...33
ЮН13ДК24	18	40	1,25	25...27
ЮН14ДК24	18	48	1,20	20...22
ЮН15ДК24	18	52	1,15	15...17

Марки	Максимальная магнитная энергия, кДж/м <sup>3</sup> , не менее,	Коэрцитивная сила по индукции, кА/м, не менее	Остаточная индукция $B_r$ Тл, не менее	Отношение В/Н в точке максимума $10^{-3}$ Тл/(кА·м)
ЮН13ДК25А	28	44	1,40	27...30
ЮН14ДК25А	28	52	1,35	24...25
ЮН13ДК25БА	28	48	1,40	26...27
ЮН14ДК25БА	28	58	1,30	21...24
ЮН15ДК'25БА	28	62	1,1,25	16...21
ЮНДК34Т5	14	92	0,75	8...11
ЮНДК35Т5Б	16	96	0,75	8...10
ЮНДК35Т5	18	110	0,75	7...8
ЮНДК35Т5БА	36	110	1,02	8...9
ЮНДК35Т5АА	40	115	1,05	8...9
ЮНДК38Т7	18	135	0,75	4...5
ЮНДК40Т8	18	145	0,70	3...5
ЮНДК40Т8АА	32	145	0,90	4...5

Некоторые современные предприятия — изготовители постоянных магнитов в России используют наравне с общепринятым обозначением марок так называемые торговые марки. Пример обозначения магнитов: ЛМ 7,2/40 — литой магнит с максимальной удельной энергией  $(BH)_{\text{макс}} = 7,2$  кДж/м<sup>3</sup>;  $H_{\text{см}} > 40$  кА/м. Литые магниты имеют равноосную кристаллическую структуру, а магнит марки ЛМ 84/118 (ЮНДКТ5АА) — монокристаллическую.

Магнитные свойства современных литых магнитов приведены в табл. 20.23, а физико-механические — в табл. 20.24. На рис. 20.5 представлены кривые размагничивания литых магнитов, приведенных в табл. 20.23.

Таблица 20.23  
Магнитные свойства литых магнитов

Торговая марка	Марка сплава	$B_r$ Тл	$H_{\text{св}}$ кА/м	$(BH)_{\text{макс}}$ кДж/м <sup>3</sup>	$T_c$ °С (макс)	Кристаллическая структура
ЛМ 7,2/40	ЮНД4	>0,5	>40	>7,2	450	равноосная
ЛМ 16/52	ЮНДКИ	0,55...0,9	48...55	12,0...19,4	450	равноосная
ЛМ 40/46	ЮНДК	1,11...1,25	40...52	36,0...44,0	500	равноосная
ЛМ 36/106	ЮНДКТ5	0,75...0,9	92...120	28,0...44,0	550	равноосная
ЛМ 58/53	ЮНДКБА	1,25...1,4	44...62	56,0...60,0	500	столбчатая
ЛМ 80/115	ЮНДКТ5БА	1,0...1,1	110...120	72,0...88,0	550	столбчатая
ЛМ 84/118	ЮНДКТ5АА	1,05...1,1	115...120	80,0...88,0	550	монокристаллическая

Таблица 20.24

## Физико-механические свойства

Наименование параметра	ЛМ 7,2/40	ЛМ 16/52	ЛМ 40/46	ЛМ 36/106	ЛМ 58/53	ЛМ 80/115	ЛМ 84/118
Плотность, г/см <sup>3</sup>	6,9	7,1	7,3	7,3	7,3	7,3	7,3
Температура Кюри, °С	760	815	890	860	890	860	860
Коэффициент обратной температурной индукции вблизи (ВН) <sub>max</sub> , %/°С	-0,025	-0,020	-0,018	-0,01	-0,01	-0,01	0,001
Удельное сопротивление, 10 <sup>-6</sup> Ом·м при 20 °С	60	65	47	54	47	53	54
Коэффициент теплового расширения $\alpha$ , 10 <sup>-6</sup> ·1/°С	0,33	0,32	0,29	0,28	0,29	0,28	0,28
Предел прочности на растяжение, МПа	82,7	20,7	37,2	68,9	34,5	48,2	69,0
Твердость по HRC	45	45	50	55	50	55	55

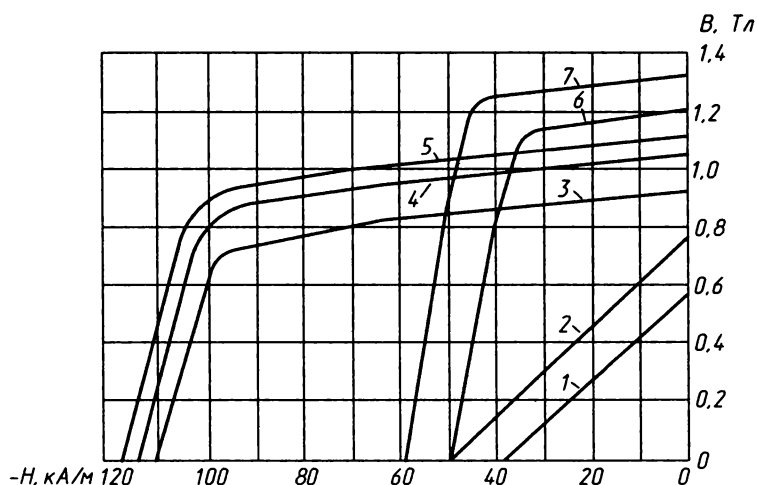


Рис. 20.5. Характерные кривые размагничивания литых магнитов:  
 1 — ЮНД4, 2 — ЮНДКИ, 3 — ЮНДКТ5, 4 — ЮНДКТ5БА,  
 5 — ЮНДКТ5АА, 6 — ЮНДК, 7 — ЮНДКБА

## 20.6.2. Материалы магнитотвердые спеченные

В химический состав спеченных материалов входят кобальт, самарий либо ниодим, а также самарий с празеодимом. По этой причине магниты называют также редкоземельными. Редкоземельные магнитотвердые материалы обладают более высокими магнитными параметрами по сравнению с литыми и ферритовыми магнитами.

В обозначении марок магнитотвердых спеченных материалов буквы обозначают: К — кобальт, С — самарий, П — празеодим, а цифры соответствуют среднему содержанию самария или среднему суммарному содержанию самария и празеодима. Буква А означает материал с улучшенной текстурой. Например, марка КС37А означает кобальт-самариевый магнит с улучшенной текстурой, содержащий 37% самария.

Значения основных магнитных параметров спеченных материалов приведены в табл. 20.25.

Таблица 20.25

Основные магнитные параметры спеченных материалов

Марка	Остаточная индукция $B_r$ , Тл, не менее	Коэрцитивная сила по индукции, $H_{св}$ , кА/м, не менее	$(BH)_{\max}$ , кДж/м <sup>3</sup> , не менее	Коэрцитивная сила по намагничённости, $H_{см}$ , кА/м, не менее
КС37	0,77	540	110	1300
КС37А	0,82	560	130	1000
КСП37	0,85	520	130	800
КСП37А	0,90	600*	145	640

Некоторые российские предприятия — производители постоянных магнитов наряду со стандартными обозначениями используют торговые марки магнитов. Пример обозначения магнитов: СМ 130/1000 — самариевый магнит,  $(BH)_{\max} = 130$  кДж/м<sup>3</sup>;  $H_{см} > 1000$  кА/м; НМ — магнит на основе NdFeB или неодимовый. Структура магнитов анизотропная. Магниты обладают высокой остаточной индукцией и работают при температурах от 80 до 300 °С. Магнитные свойства редкоземельных магнитов приведены в табл. 20.26, а физико-механические свойства — в табл. 20.27. Характерные кривые размагничивания редкоземельных магнитов представлены на рис. 20.6.

Таблица 20.26

## Магнитные свойства редкоземельных магнитов

Торговая марка	Марка материала	$B_r$ , Тл	$H_{sm}$ , кА/м	$H_{ci}$ , кА/м	$(BH)_{max}$ , КДж/м <sup>3</sup>	$T_{max}$ , °C
НМ 285/850	NdFeB	1,25...1,3	>850	850...1000	>285	80
НМ 240/1200	NdFeB	>1,05	>750	>1200	>240	100
НМ 270/1150	NdFeB	1,2...1,25	>900	1150...1250	>270	100
НМ 240/1400	NdFeB	>1,05	>750	>1400	>240	120
НМ 245/1360	NdFeB	1,15...1,22	>850	1360...1440	>245	120
НМ240/1440	NdFeB	1,1...1,15	>800	1440...1600	>240	150
НМ 200/1800	NdFeB	1,04...1,08	>800	1800...2000	>200	160
СМ 130/1000	SmCo <sub>5</sub>	>0,82	>560	>1000	>130	250
СМ 150/900	Sm <sub>2</sub> Co <sub>17</sub>	>0,98	>710	>900	>190	300

Примечание. В таблице приведены характеристики материалов при перпендикулярном прессовании.

Таблица 20.27

## Физико-механические свойства редкоземельных магнитов

Наименование параметра	Марка материала		
	NdFeB	Sm Co <sub>5</sub>	Sm <sub>2</sub> Co <sub>17</sub>
Плотность, г/см <sup>3</sup>	7,4...7,5	8,3...8,5	8,3...8,5
Температура Кюри, °C	310...320	740...750	820...830
Температурный коэффициент магнитной индукции ТКИМ, %/°C:			
от -40 до +20 °C	-0,1	-0,045	-0,03
от +20 до +150 °C	-0,12	-0,045	-0,03
Температурный коэффициент коэрцитивной силы по намагниченности ТКНм, %/°C:			
от -40 до +20 °C	-0,6	-0,3	-0,22
от +20 до +150 °C	-0,8	-0,3	-0,22
Удельное сопротивление, Ом·м·10 <sup>-6</sup>	1,5...1,6	0,5...0,6	0,85...0,9
Коэффициент теплового расширения, К <sup>-1</sup> ·10 <sup>-6</sup>			
Вдоль направления магнитной анизотропии	(3,4...5)	11	6
Поперек направления магнитной анизотропии	(от 1 до -4,8)	8	11
Предел прочности, МПа,			
на изгиб	200...270	—	—
на сжатие	1050	—	—
на растяжение	70...90	35...45	30...40
Твердость по HRC	50...70	50...70	50...70

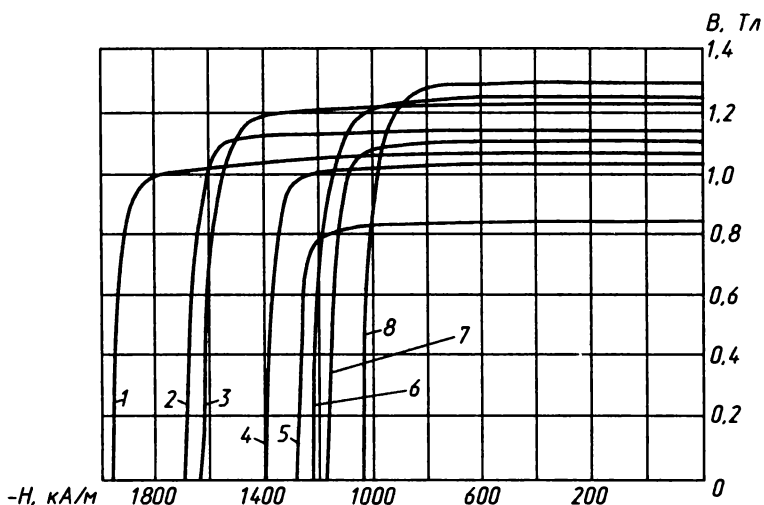


Рис. 20.6. Характерные кривые размагничивания редкоземельных магнитов: 1 — HM200/1800; 2 — HM 240/1440; 3 — HM 245/1360; 4 — HM 240/ 1400; 5 — CM — 130/1000; 6 — HM270/1150; 7 — HM 240/1200; 8 — HM 285/850

### 20.6.3. Материалы магнитотвердые деформируемые

Магнитотвердые деформируемые материалы на основе сплавов железа, хрома и кобальта, подвергающиеся горячей и холодной пластической деформации, предназначены для изготовления постоянных магнитов толщиной не более 50 мм и диаметром не более 100 мм. Буквы означают: Х — хром, К — кобальт, Ф — ванадий. В зависимости от направленности магнитных свойств материалы подразделяют на анизотропные и изотропные. Буква А — магнитная анизотропия. Материал изготавливают литым (Л), горячекатаным (ГК), холоднокатаным (ХК).

Пример условного обозначения материала марки: 28Х10КА сплав, содержащий 28% хрома, 10% кобальта, остальное — железо, а также небольшое (доли %) содержание алюминия и кремния.

Основные магнитные параметры материалов приведены в табл. 20.28.

Материалы изготавливают в виде круглых прутков диаметром 2...30 мм и длиной 8...90 мм, квадратных прутков стороной 2...30 мм и длиной 8...90 мм, полос с большей стороной

Таблица 20.28

**Основные магнитные параметры  
деформируемых магнитотвердых материалов**

Марка материала	$(BH)_{\max}$ , кДж/м <sup>3</sup> , не менее	Коэрцитивная сила по индукции, $H_{cm}$ , кА/м, не менее	Остаточная индукция $B_r$ , Тл, не менее
28Х10К	7	20	0,8
38Х10КА	26	38	1,1
25Х15К	10	24	0,9
25Х15КА	32	40	1,2
23Х15К5ФА	38	42	1,25
20Х23К	12	50	0,75
30Х23КА	39	55	1,00

3...50 мм, меньшей стороной 2...30 мм и длиной 8...90 мм, труб, цилиндров и колец наружным диаметром 2...100 мм, толщиной стенки 2...15 мм и длиной 3...90 мм.

Табл. 20.29 дает представление о режимах термической обработки магнитотвердых деформируемых материалов.

Таблица 20.29

**Режимы термической обработки  
магнитотвердых деформируемых материалов**

Марка материала	Режимы термической обработки
28Х10КА, 25Х15КА, 23Х15К5ФА	Нагрев до 1100...1250 °С, выдержка 0,5...1 ч, закалка в воде или нормализация, термомагнитная обработка при 620...650 °С в магнитном поле напряженностью не менее 100 кА/м в течение 1...2 ч, отпуск 610 °С — 2 ч, 580 °С — 3 ч, 560 °С — 4 ч, 540 °С — 6 ч
30Х23КА	Нагрев до 1300 °С, выдержка 0,5...1 ч, закалка в воде, термомагнитная обработка при 620...640 °С в магнитном поле напряженностью не менее 100 кА/м в течение 40...50 мин, отпуск: 620 °С — 1 ч, 600 °С — 1 ч, 580 °С — 2 ч, 660 °С — 3 ч, 540 °С — 4 ч
28Х10К, 25Х15К	Нагрев до 1100...1250 °С, выдержка 0,5...1 ч, закалка в воде или нормализация, отпуск: 640 °С — 1 ч, 620 °С — 2 ч, 580 °С — 3 ч, 560 °С — 4 ч, 540 °С — 6 ч
30Х23К.	Нагрев до 1300 °С, выдержка 0,5...1 ч, закалка в воде, отпуск: 640 °С — 1 ч, 620 °С — 1 ч, 600 °С — 1 ч, 680 °С — 2 ч, 560 °С — 3 ч, 540 °С — 4 ч

#### 20.6.4. Магниты металлокерамические постоянные

Металлокерамические материалы получают прессованием порошкообразных компонентов с последующим обжигом от-

прессованных изделий (магнитов). По своей структуре магниты марок ММК1 — ММК6 изотропные, а ММК7 — ММК11 анизотропные.

Марки и магнитные свойства металлокерамических материалов приведены в табл. 20.30.

Таблица 20.30

Марки и магнитные свойства металлокерамических материалов

Марка магнита	Остаточная индукция $B_r$ , Тл, не менее	Коэрцитивная сила $H_c$ , кА/м, не менее	$(BH)_{\max}$ , кДж/м <sup>3</sup> , не менее	Индукция $B_d$ , Тл	Напряженность поля $H_d$ , кА/м
ММК1	0,60	24	3000	0,35	17
ММК2	0,48	39	3500	0,30	23
ММК3	0,52	44	4000	0,30	27
ММК4	0,55	40	4500	0,30	30
ММК5	0,60	44	4700	0,35	27
ММК6	0,65	44	5000	0,40	25
ММК7	0,95	44	10500	0,60	35
ММК8	1,10	40	14000	0,80	35
ММК9	0,75	80	12000	0,45	54
ММК10	0,80	100	15000	0,53	57
ММК11	0,70	128	16000	0,40	80

## 20.6.5. Легированная магнитотвердая сталь

Сталь получают легированием хромом, вольфрамом, кобальтом или молибденом. Марки стали: ЕХЗ, ЕВ6, ЕХ5К5 и ЕХ9К15М2. Буквы в обозначениях марок стали означают: Е — сталь магнитотвердая; Х — хром; В — вольфрам; К — кобальт; М — молибден. В стали могут содержаться также марганец (до 0,4%), кремний (до 0,4%), а также никель и фосфор. Цифры, стоящие справа от букв, указывают содержание в % данного элемента в стали.

Из легированной магнитотвердой стали изготавливают горячекатаные или кованые круглые и квадратные прутки диаметром или стороной квадрата до 70 мм и прямоугольные прутки толщиной до 25 мм и шириной до 50 мм, предназначенные для изготовления постоянных магнитов.

Магнитные параметры магнитотвердой легированной стали приведены в табл. 20.31.

Таблица 20.31

Магнитные параметры магнитотвердой легированной стали

Марка	Коэрцитивная сила, А/м	Остаточная индукция, Тл
ЕХ3	4775	0,95
ЕВ6	4775	1,00
ЕХ5К5	7162	0,85
ЕХ9К15М2	11937	0,80

### 20.6.6. Ферритовые магнитотвердые материалы (ферромагниты)

Магнитные свойства ферромагнитов, полученных методами сухого и мокрого прессования, приведены в табл. 20.32, физико-механические свойства — в табл. 20.33.

Обозначение марок, например: ФМ 28/250 — ферритовый магнит, максимальная удельная энергия  $(BH)_{\text{макс}} > 28 \text{ кДж/м}^3$ ;  $H_{\text{см}} > 250 \text{ кА/м}$ . Магнит ФМ6/240 имеет изотропную структуру, остальные марки — анизотропную.

Таблица 20.32

Магнитные свойства ферромагнитов

Торговая марка	Марка феррита	$B_r$ , Тл	$H_{\text{св}}$ , кА/м	$H_{\text{сг}}$ , кА/м	$(BH)_{\text{макс}}$ , кДж/м <sup>3</sup>	$T_c$ , °С (макс)
ФМ 6/240	6СИ240	>0,19	>125	>240	>6,0	250
ФМ 18/220	18СА220	>0,33	>210	>220	>18,0	250
ФМ 25/240	18СА220	>0,37	>230	>240	>25,0	250
ФМ 28/250	28СА250	>0,39	>240	>250	>28,0	250
ФМ 31/260	31СА260	>0,41	>250	>260	>31,0	250

Таблица 20.33

Физико-механические свойства ферритовых магнитов

Наименование параметра	Значение
Плотность, г/см <sup>3</sup>	4,5...5,1
Температура Кюри, °С	450
Проницаемость возврата ферритов $\mu$ :	
для изотропных ферритов	1,15...1,35
для анизотропных ферритов	1,03...1,25
Температурный коэффициент магнитной индукции ТКИ, %/К	-0,2
Температурный коэффициент коэрцитивной силы по намагниченности, ТКНм, %/К :	0,2...0,5

Наименование параметра	Значение
Удельное электрическое сопротивление, Ом·м	$10 \dots 10^3$
Коэффициент теплового расширения, $K^{-1}$ :	
вдоль направления магнитной анизотропии	$(13 \dots 15,5) \cdot 10^{-6}$
поперек направления магнитной анизотропии	$(8 \dots 11) \cdot 10^{-6}$
Предел прочности, МПа:	
на изгиб	70...80
на сжатие	180...200
на растяжение	25...30
Твердость по Моосу	6...7

На рис. 20.7 представлены характерные кривые размагничивания ферромагнитов.

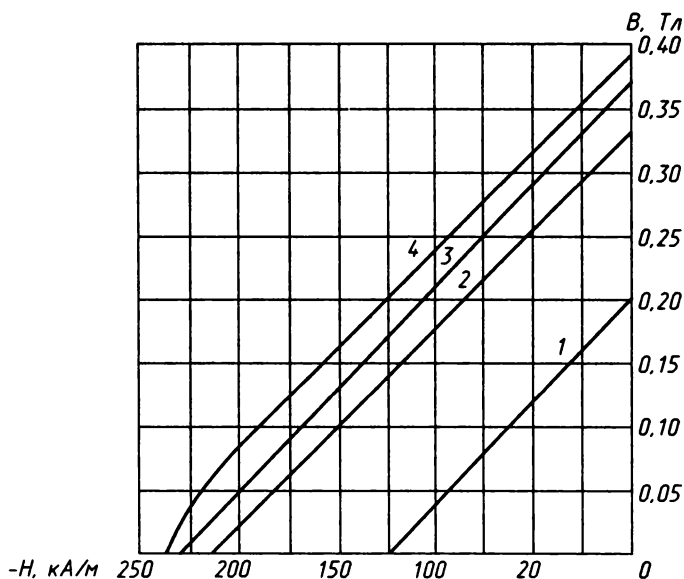


Рис. 20.7. Характерные кривые размагничивания ферромагнитов:  
1 — ФМ 6/240; 2 — ФМ 18/220; 3 — ФМ 25/240; 4 — ФМ 28/250

Технические данные магнитов марок ФМ, ЛА СМ и НМ приведены по каталогу завода изготовителя «Магнетон».

Более подробные сведения по магнитным материалам читатель найдет также в [8, 18, 19].

## 21. КЛАССИФИКАЦИЯ И ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ

### 21.1. Основные определения и классификация диэлектрических материалов

*Диэлектриками* называются вещества, основным электрическим свойством которых является способность *поляризоваться* в электрическом поле. Электроизоляционными материалами называют диэлектрические материалы, предназначенные для создания электрической изоляции токоведущих частей электротехнических установок. *Изолятором* называется изделие из электроизоляционного материала, задачами которого являются крепление и изоляция друг от друга проводников, находящихся под различными потенциалами; пример — изоляторы воздушных линий электропередачи. *Электрической изоляцией* называется электроизоляционная система определенного конкретного электротехнического изделия, выполненная из одного или нескольких электроизоляционных материалов.

Суть явления *поляризации* заключается в том, что под воздействием внешнего электрического поля связанные заряды диэлектрика смещаются в направлении действующих на них сил и тем больше, чем выше напряженность поля. В дипольных диэлектриках воздействие электрического поля вызывает соответствующую ориентацию дипольных молекул в направлении поля; при отсутствии поля диполи расположены беспорядочно вследствие теплового движения. В результате поляризации на поверхности диэлектрика образуются заряды разных знаков.

Принято различать упругую (быструю, релаксационную) и неупругую (медленную, нерелаксационную) поляризации. Упругая поляризация завершается практически мгновенно за время, много меньшее полупериода  $T/2 = 1/2f$  ( $f$  — частота, Гц) приложенного напряжения. Поэтому процесс быстрой поляризации создает в диэлектрике только реактивный ток. К таким видам поляризации относятся электронная (завершается за время  $10^{-15} \dots 10^{-14}$  с) и ионная упругая (завершается за время  $10^{-14} \dots 10^{-13}$  с). Неупругая поляризация завершается за время, соизмеримое с полупериодом приложенного напряжения.

Диэлектрики, у которых имеет место только электронная поляризация, называются неполярными диэлектриками. Диэлектрическая проницаемость неполярных диэлектриков не изменяется с ростом частоты приложенного напряжения вплоть до  $10^{12} \dots 10^{13}$  Гц. Это свидетельствует о том, что процесс поляризации происходит за время много меньшее, чем  $10^{-13} \dots 10^{-12}$  с.

К неупругим поляризациям относится дипольная поляризация, которая наблюдается в полярных газообразных и жидких диэлектриках. Полярная молекула имеет собственный электрический момент (дипольный момент). В электрическом поле в таких молекулах смещаются электронные оболочки — совершается электронная поляризация. Кроме того, происходит дипольная поляризация: моменты молекул несколько ориентируются вдоль линии напряженности электрического поля  $E$ . При ориентации в электрическом поле диполи преодолевают межмолекулярные силы, поворачиваются с «трением»; поляризация происходит с потерями энергии.

*Проводимость диэлектрика* обусловлена наличием незначительного числа свободных зарядов. Диэлектрические материалы обладают очень большим электрическим сопротивлением, которое находится в пределах  $10^6 \dots 10^{22}$  Ом·м.

Диэлектрические материалы классифицируют:

- по агрегатному состоянию: газообразные, жидкие и твердые;
- по способу получения: естественные и синтетические;
- по химическому составу: органические и неорганические;
- по строению молекул: нейтральные и полярные.

*Газообразные электроизоляционные материалы:* воздух, азот, водород, углекислый газ, элегаз, фреон. В электротехнике некоторые газы применяются и в жидком состоянии, например жидкий водород используется для охлаждения мощных турбогенераторов.

*Жидкие и полужидкие материалы:* нефтяные масла (трансформаторное, конденсаторное, кабельное) и синтетические диэлектрики (совол, совтол, ПЭС-Д, ПМС-10Д), а также широкий класс электроизоляционных материалов (лаки, эмали, компаунды, клеи).

Основным элементом в молекулах всех *органических* электроизоляционных материалов является углерод. В *неорганических* материалах углерод не содержится. Наибольшей нагревостойкостью обладают неорганические электроизоляционные материалы: слюда, керамика и др.

*Естественные* электроизоляционные материалы имеют природное происхождение. *Синтетические* материалы создаются искусственно и могут иметь заданную совокупность электрических и физико-химических свойств. По этой причине они нашли широкое применение в электротехнике.

К неполярным диэлектрикам относятся, например, полиэтилен, фторопласт-4 и др. Полярными диэлектриками явля-

ются, например, поливинилхлорид, совол и другие диэлектрики.

Электроизоляционные материалы классифицируются и по ряду внутривидовых признаков, которые определяются их основными характеристиками: электрическими, механическими, физико-химическими, тепловыми.

## 21.2. Основные характеристики электроизоляционных материалов

### 21.2.1. Электрические характеристики диэлектрических материалов

К электрическим характеристикам диэлектриков относятся:

- удельное объемное электрическое сопротивление  $\rho$ , Ом·м или удельная объемная проводимость  $\sigma$ , См/м;
- удельное поверхностное электрическое сопротивление  $\rho_s$  или удельная поверхностная проводимость  $\sigma_s$ , См;
- температурный коэффициент удельного электрического сопротивления  $TK\rho$ ,  $^{\circ}\text{C}^{-1}$ ;
- диэлектрическая проницаемость  $\epsilon$ ;
- температурный коэффициент диэлектрической проницаемости  $TK\epsilon$ ;
- тангенс угла диэлектрических потерь  $\text{tg}\delta$ ;
- электрическая прочность материала  $E_{\text{пр}}$ , МВ/м.

*Удельное объемное электрическое сопротивление  $\rho$*  — величина, равная отношению модуля напряженности электрического поля к модулю плотности тока, скалярная для изотропного вещества и тензорная для анизотропного вещества (ГОСТ 19880-74). Эта величина позволяет оценить электрическое сопротивление материала при протекании через его объем *постоянного тока*. Для практических измерений часто используют дольную единицу Ом·см. Величина  $\rho$  низкокачественных диэлектриков при нормальной температуре и влажности находится в пределах  $10^6 \dots 10^8$  Ом·м, для высококачественных — в пределах до  $10^{14} \dots 10^{22}$  Ом·м.

*Удельная объемная проводимость* — величина, обратная удельному объемному сопротивлению. В соответствии с ГОСТ 19880-74 удельную объемную проводимость определяют как величину, равную отношению модуля плотности тока проводимости к модулю напряженности электрического поля, скалярную для изотропного вещества, тензорную для анизотропного вещества. Обозначается эта величина  $\sigma$ , единица ее измерения См/м.

Удельное поверхностное электрическое сопротивление диэлектрика  $r_s$  — это поверхностное сопротивление плоского участка поверхности твердого диэлектрика в форме квадрата при протекании электрического тока между двумя противоположными сторонами этого квадрата (ГОСТ 21515-76), измеряется в омах.

Удельная поверхностная проводимость  $\sigma_s$  — величина, обратная удельному поверхностному сопротивлению (См).

*Температурный коэффициент удельного электрического сопротивления* — это величина, определяющая изменение удельного сопротивления материала с изменением его температуры. Средняя величина температурного коэффициента удельного электрического сопротивления при линейном изменении удельного сопротивления (в узком интервале температур),  $^{\circ}\text{C}^{-1}$ :

$$TKr = (1/\rho_2) (\rho_2 - \rho_1) / (t_1 - t_2),$$

где:  $\rho_1$  — удельное сопротивление материала при начальной температуре  $t_1$ ;  $\rho_2$  — удельное сопротивление материала при температуре  $t_2$ . В общем виде выражение для температурного коэффициента удельного объемного электрического сопротивления имеет вид,  $^{\circ}\text{C}^{-1}$ :

$$TK\rho = (1/\rho_2) (d\rho / dt).$$

Следует отметить, что с повышением температуры, в противоположность проводникам, у диэлектриков электрическое сопротивление уменьшается.

*Диэлектрическая проницаемость* — это величина, которая характеризует влияние среды на силу взаимодействия находящихся в ней зарядов. Различают *относительную диэлектрическую проницаемость*  $\epsilon_r$ , *абсолютную*  $\epsilon$  и *диэлектрическую проницаемость вакуума*  $\epsilon_0$ . Эти величины связаны между собой простым соотношением:

$$\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0, \text{ или } \epsilon_r = \epsilon / \epsilon_0.$$

*Относительная диэлектрическая проницаемость* показывает, во сколько раз диэлектрическая проницаемость среды больше диэлектрической проницаемости вакуума.

Поляризованность диэлектрика  $P$  зависит от напряженности электрического поля  $E$  и величин  $\epsilon_r$  и  $\epsilon_0$ :

$$P = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) E.$$

В газообразных диэлектриках  $\epsilon_r$  близко к 1, в неполярных жидких и твердых диэлектриках находится в пределах от 1,5 до 3,0, в полярных — в пределах от 5 до  $10^3$ . Величина  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$  Ф/м.

У всех диэлектриков диэлектрическая проницаемость изменяется с изменением температуры и частоты приложенного к диэлектрику напряжения.

*Температурный коэффициент диэлектрической проницаемости  $TK\epsilon_r$*  — величина, позволяющая оценить характер изменения диэлектрической проницаемости с изменением температуры:

$$TK\epsilon_r = (1/\epsilon_r) (d\epsilon_r / dT).$$

Если  $TK\epsilon_r > 0$ , то с повышением температуры диэлектрическая проницаемость электроизоляционного материала возрастает, при  $TK\epsilon_r < 0$  — уменьшается.

В диэлектрике, находящемся в переменном поле, имеются *диэлектрические потери*, которые зависят от частоты  $f$ , Гц, приложенного напряжения  $U$ , В, емкости  $C$ , Ф и тангенса угла диэлектрических потерь  $\text{tg}\delta$ , Вт:

$$P_a = U^2 C f \text{tg}\delta.$$

*Тангенс угла диэлектрических потерь  $\text{tg}\delta$*  — это величина, позволяющая определить потери мощности (диэлектрические потери) в диэлектрике, работающем под переменным напряжением. Величину  $\text{tg}\delta$  определяют как отношение мощности диэлектрических потерь к реактивной мощности конденсатора.

Произведение  $\text{tg}\delta$  на величину относительной диэлектрической проницаемости называется *коэффициентом диэлектрических потерь*:

$$\epsilon'' = \epsilon_r \text{tg}\delta.$$

Диэлектрические потери обусловлены наличием в диэлектрике токов проводимости, медленной поляризацией, ионизацией диэлектриков и другими факторами. Для диэлектриков, применяемых в технике высоких напряжений и высоких частот, тангенс угла диэлектрических потерь должен быть менее  $10^{-3}$ .

*Электрическая прочность* — величина, определяющая способность диэлектрика противостоять разрушению его электрическим напряжением. Электрическая прочность диэлектрика в однородном поле, В/м:

$$E_{\text{пр}} = U_{\text{пр}} / d,$$

где  $U_{пр}$  — величина приложенного к диэлектрику напряжения, при котором произошел пробой, В;  $d$  — толщина материала в месте пробоя, м. На практике электрическую прочность измеряют также и в кВ/мм.

В соответствии с происходящими в диэлектрике процессами различают следующие виды пробоев:

— *электрический (электронный) пробой*, обусловленный ударной ( $10^{-8} \dots 10^{-5}$  с) ионизацией ускоренными в электрическом поле электронами;

— *электротепловой пробой*, обусловленный нарастающими диэлектрическими потерями и выделением теплоты в диэлектрике в пределах времени  $10^{-3} \dots 10^{-2}$  с.

— *электрохимический пробой*, обусловленный электрическим старением диэлектрика, т.е. медленным изменением структуры и химического состава диэлектрика в течение времени  $10^3 \dots 10^8$  с, которое называют также временем жизни диэлектрика.

Значения электрической прочности и пробоя для диэлектриков определяются в соответствии с ГОСТ 6433-71.

### 21.2.2. Механические, физико-химические и тепловые характеристики диэлектриков

*Механические свойства диэлектриков* определяют следующие характеристики: разрушающее напряжение при статическом растяжении; разрушающее напряжение при статическом сжатии; разрушающее напряжение при статическом изгибе; твердость; ударная вязкость; сопротивление раскалывания; стойкость к надрыву (для гибких материалов); гибкость по числу двойных перегибов; пластоэластические свойства. Механические характеристики диэлектриков определяют соответствующие ГОСТы.

*Физико-химические характеристики:* кислотное число, определяющее количество свободных кислот в диэлектрике, ухудшающих диэлектрические свойства жидких диэлектриков, компаундов и лаков; кинематическая и условная вязкость; водопоглощаемость; водостойкость; влагостойкость; дугостойкость; трекингстойкость, радиационная стойкость и др.

*Тепловые характеристики* определяют термические свойства диэлектриков. К тепловым характеристикам относятся: теплоемкость; температура плавления; температура размягчения; температура каплепадения; теплостойкость; нагревостойкость; холодостойкость — способность диэлектриков противостоять

низким температурам, сохраняя электроизолирующие свойства; тропикостойкость — стойкость диэлектриков к комплексу внешних воздействий в условиях тропического климата: резкий перепад температур, высокая влажность, солнечная радиация; термоэластичность; температура вспышки паров электроизоляционных жидкостей.

**Нагревостойкость** — одна из важнейших характеристик диэлектриков. В соответствии с ГОСТ 21515-76 нагревостойкость — это способность диэлектрика длительно выдерживать воздействие повышенной температуры в течение времени, сравнимого со сроком нормальной эксплуатации, без недопустимого ухудшения его свойств.

Согласно рекомендациям МЭК введена характеристика, называемая температурным индексом (ТИ). ТИ — это температура, при которой срок службы материала составляет 20 тыс. часов.

По условиям нагревостойкости диэлектрики разделяют на 7 классов. Температурные индексы, классы нагревостойкости и характеристики основных групп диэлектриков, соответствующие данному классу, приведены в табл. 21.1.

Таблица 21.1

Классы нагревостойкости электроизоляционных материалов

ТИ	Класс нагревостойкости	Температура, °C	Характеристика основных групп электроизоляционных материалов, соответствующих данному классу нагревостойкости
90	Y	90	Не пропитанные и не погруженные в жидкий электроизоляционный материал волокнистые материалы из целлюлозы, хлопка и шелка, а также соответствующие данному классу другие материалы и другие сочетания материалов
105	A	105	Пропитанные или погруженные в жидкие электроизоляционные материалы, волокнистые материалы из целлюлозы, хлопка или натурального, искусственного или синтетического шелка, а также соответствующие данному классу другие материалы и другие сочетания материалов
120	E	120	Синтетические органические материалы (волокна, смолы, компаунды и пленки), а также соответствующие данному классу материалы и другие сочетания материалов
130	B	130	Материалы на основе слюды (в том числе на органических подложках), асбеста и стекловолокна, применяемые с органическими связующими и пропитываемые с органическими связующими и пропитываемыми составами, а также соответствующие данному классу другие материалы и другие сочетания материалов

ТИ	Класс на- гревостой- кости	Темпе- ратура, °С	Характеристика основных групп электроизоляционных материалов, соответствующих данному классу нагревостойкости
155	F	155	Материалы на основе слюды, асбеста и стекловолокна, применяемые в сочетании с синтетическими связующими и пропитывающими составами, а также соответствующие данному классу другие материалы и другие сочетания материалов
180	H	180	Материалы на основе слюды, асбеста, стекловолокна, применяемые в сочетании с кремнийорганическими связующими и пропитывающими составами, кремнийорганические эластомеры, а также соответствующие данному классу другие материалы и другие сочетания материалов
180	C	Более 180	Слюда, керамические материалы, стекло, кварц или их комбинации, применяемые без связующих составов или с неорганическими или элементарноорганическими связующими составами, а также соответствующие данному классу другие материалы и другие сочетания материалов

Указанные в табл. 21.1 температуры являются предельно допустимыми для электроизоляционных материалов при их длительном использовании в электрических машинах и аппаратах, работающих в нормальных эксплуатационных условиях. Температуры в наиболее нагретом месте изоляции не должны превышать указанных предельно допустимых величин при работе электрооборудования в номинальном режиме.

С электроизоляционными материалами данного класса допускается совместное применение материалов предшествующих классов при условии, что под действием температуры, допускаемой для материалов более высокого класса, электрические и механические свойства комплексной изоляции не должны претерпевать изменений, могущих вызвать непригодность изоляции для длительной работы.

Принято следующее ориентировочное распределение электроизоляционных материалов по классам нагревостойкости (температурному индексу), которое приводится ниже.

*Класс нагревостойкости Y (ТИ 90):* текстильные материалы на основе хлопка, натурального шелка, регенерированной целлюлозы, ацетилцеллюлозы и полиамидов, а также целлюлозные электроизоляционные бумаги, картоны и фибра, древесина, пластические массы с органическими накопителями.

*Класс нагревостойкости A (ТИ 105):* материалы класса нагревостойкости Y, если они пропитаны изоляционным составом

или погружены в жидкие диэлектрики; ацетобутилатцеллюлозные, ацетилцеллюлозные и диацетатные пленки, пленкоэлектротектон на основе ацетилцеллюлозной пленки; лакоткани, лакобумаги и лакочулки; изоляцию эмалированных проводов, слоистые пластики на основе целлюлозных бумаг и тканей, полиамидные литые смолы, асбестоцемент, пропитанный органическим составом, не вытекающим при 110 °С, древесно-слоистые пластики, терморезистивные компаунды на основе акриловых и метакриловых эфиров.

*Класс нагревостойкости Е (ТИ 120):* пленки и волокна из полиэтилентерефталата, материалы на основе электроизоляционного картона и полиэтилентерефталатной пленки, стеклолакоткани и лакоткани на основе полиэтилентерефталатных волокон, терморезистивные синтетические смолы и компаунды (эпоксидные, полиэфирные, полиуретановые).

*Класс нагревостойкости В (ТИ 130):* материалы на основе шпательной слюды, слюдопластов и слюдинитов, в том числе с бумажной или тканевой органической подложкой, стеклоткани и стеклолакочулки, асбестовые волокнистые материалы, изоляции эмалированных проводов, пластмассы с неорганическим наполнителем, слоистые пластики на основе стекловолокнистых асбестовых материалов, терморезистивные синтетические компаунды, асбестоцемент.

В качестве пропитывающих и покровных составов для изоляции класса В применяют битумно-масляно-смоляные лаки и лаки на основе природных и синтетических смол.

*Класс нагревостойкости F (ТИ 155)* включает материалы на основе шпательной слюды, слюдинитов и слюдопластов без подложки или с неорганической подложкой, стекловолокнистую и асбестовую изоляцию проводов, стеклоткани и стеклолакочулки, слоистые пластики на основе стекловолокнистых и асбестовых материалов. При пропитке применяются соответствующие данному классу нагревостойкости лаки и смолы.

*Класс нагревостойкости Н (ТИ 180):* материалы на основе слюды без подложки или с неорганической подложкой, стекловолокнистая изоляция проводов, стеклолакоткани и стеклолакочулки, слоистые пластики на основе стекловолокнистых и асбестовых материалов, пластические массы с неорганическим наполнителем, асбестоцемент, кремнийорганические эластомеры без подложек с неорганическими подложками, асбестовые пряжа, бумага и ткани.

При производстве материалов класса нагревостойкости Н для пропитки применяются кремнийорганические лаки и смолы.

*Класс нагревостойкости С (ТИ 180):* слюда, стекло бесщелочное и стекловолокнистые материалы, электротехниче-

ская керамика, кварц, асбоцемент, шифер электротехнический, материалы из шипаной слюды без подложки или со стекловолокнуистой подложкой, микалекс, политетрафторэтилен, полиимиды.

### 21.3. Газообразные диэлектрики

К газообразным диэлектрикам относятся воздух, азот, водород, углекислый газ, элегаз, хладон (фреон), аргон, неон, гелий и др. Газообразные диэлектрики используются при изготовлении электрических аппаратов (воздушные и элегазовые выключатели, разрядники и др.).

Наиболее широко в качестве электроизолирующего материала используется воздух. Воздух содержит: пары воды и газы: азот (78%), кислород (20,99%), углекислый газ (0,03%), водород (0,01%), аргон (0,9325%), неон (0,0018%), а также гелий, криптон и ксенон, которые по объему в сумме составляют десятитысячные доли процента.

Воздух окружает большое число электротехнических установок, а в ЛЭП является основной изолирующей средой. Электрическая прочность воздуха зависит от ряда факторов: давления, температуры, влажности и др. В нормальных условиях и расстоянии между электродами 1...3 см электрическая прочность воздуха принимается равной 3 МВ/м или 30 кВ/см.

Для определения пробивного напряжения воздуха при частоте 50 Гц и расстоянии между остриями более 0,3 м можно использовать график, представленный на рис. 21.1 [8].

Важными свойствами газов являются их способность восстанавливать электрическую прочность, малая диэлектрическая проницаемость, высокое значение удельного сопротивления, практически отсутствие старения, инертность ряда газов по отношению к твердым и жидким материалам, нетоксичность, способность их работать при низких температурах и высоком давлении, негорючесть.

Водород применяется в основном для охлаждения мощных турбогенераторов.

Азот используется в качестве диэлектрика в эталонных (измерительных) конденсаторах, кабелях (в смеси с элегазом).

Элегаз используется в качестве эффективной изолирующей среды в высоковольтных выключателях, разъединителях, трансформаторах тока и напряжения, кабелях, измерительных конденсаторах, а также в элегазовых комплектных распределительных устройствах.

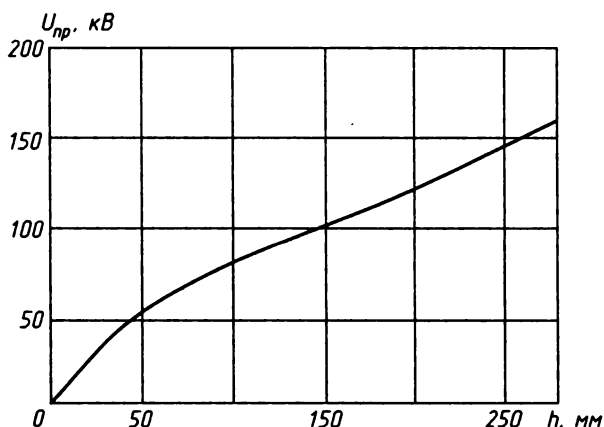


Рис. 21.1. Зависимость пробивного напряжения воздуха от расстояния между электродами (острие — острие) при нормальных атмосферных условиях (760 мм рт. ст., 20 °С, влажность 11 г/м<sup>3</sup>)

Аргон и неон применяются в приборах тлеющего разряда, газотронах, тиратронах, разрядниках, различного рода лампах.

Гелий применяют в системах глубокого охлаждения для получения весьма низких температур, а также для дугогашения.

Основные физико-химические и электрические характеристики газов приведены в табл. 21.2.

В табл. 21.2 величина  $\lambda$  — это коэффициент теплопроводности, Вт/(м·К), который определяет отвод тепла из толщи диэлектрика при его нагреве вследствие диэлектрических потерь.

## 21.4. Жидкие диэлектрики

Жидкие диэлектрики предназначены для отвода теплоты от обмоток и магнитопроводов в трансформаторах, гашение дуги в масляных выключателях, усиление твердой изоляции в трансформаторах, маслонаполненных вводах, конденсаторах, маслопропитанных и маслонаполненных кабелях.

Жидкие диэлектрики делят на две группы:

— *нефтяные масла* (трансформаторное, конденсаторное, кабельное),

— *синтетические масла* (совтол, жидкие кремнийорганические и фторорганические соединения).

Таблица 21.2

## Основные физико-химические и электрические характеристики газов

Газ	Химический состав	Молекулярная масса	Плотность при 0 °С, 0,1 МПа, кг/м³	$\lambda$ , Вт/(м·К)	$T_{\text{пл}}$ , °С	$T_{\text{кип}}$ , °С	Удельная теплоемкость, кДж/(кг·К)	$\epsilon_r$	$E_{\text{пр}}$ МВ/м
Воздух	Смесь газов	28,952	1,2929	0,0257	-213,0	-194,0	1,01	1,00059	3
Водород	H <sub>2</sub>	2,0156	0,08988	0,175	-259,14	-252,8	14,5	1,00027	1,8
Азот	N <sub>2</sub>	28,016	1,2506	0,0269	-209,86	-195,8	1,06	1,00058	3
Элегаз	SF <sub>6</sub>	146,06	6,700	0,0146	—	-63,8	0,652	1,00191	7,8
Аргон	Ar	39,948	1,78	0,0163	-189	-185,5	0,52	1,00056	—
Неон	Ne	20,183	0,90	0,0455	-248,5	-245,8	1,03	—	—
Гелий	He	4,0026	0,1785	0,1423	—	-268,78	5,27	1,000072	0,72
Хладон-12 (фреон)	CCl <sub>2</sub> F <sub>2</sub>	120,93	0,54306	0,01046	-158	-29,79	0,96296	1,0006	7,4

### 21.4.1. Нефтяные масла

Нефтяные масла получают путем перегонки нефти. Различают трансформаторные, кабельные и конденсаторные масла.

Трансформаторное масло сернокислотной очистки согласно ГОСТ 982-80 получают из малосернистых нефтей. Масло применяют для заливки трансформаторов, масляных выключателей и другой высоковольтной аппаратуры. Масло выпускают двух марок: ТКд — масло трансформаторное с добавкой не менее 0,2% антиокислительной присадки — дибутилпаракрезола; ТК — масло трансформаторное (без присадки)

Основные характеристики трансформаторных масел по ГОСТ 982-80 приведены в табл. 21.3.

Таблица 21.3

Основные характеристики трансформаторных масел

Характеристики масла	Марка масла			
	ТК	Т-750	Т-1500	ПТ
Кинематическая вязкость, $\text{м}^2/\text{с}$ (сСт);				
при 20 °С, не более	$30 \cdot 10^{-6}$ (30)	—	—	—
при 50 °С, не более	$9,6 \cdot 10^{-6}$ (9,6)	$8 \cdot 10^{-6}$ (8)	$8 \cdot 10^{-6}$ (8)	$9 \cdot 10^{-6}$ (9)
при -30 °С, не более	—	$1600 \cdot 10^{-6}$ (1600)	$1600 \cdot 10^{-6}$ (1600)	$1200 \cdot 10^{-6}$ (1200)
Кислотное число, мг КОН на 1 г масла, не более	0,05	0,01	0,01	0,01
Температура вспышки, определяемая в закрытом тигле, °С, не ниже	135	135	135	135
Температура застывания, °С, не выше	-45	-65	-45	-45
Стабильность против окисления:				
масса летучих низкомолекулярных кислот, мг КОН на 1 г масла, не более	0,005	0,003	0,004	0,002
массовая доля осадка, %, не более	0,1	0,1	Отсутствие	Отсутствие
кислотное число окисленного масла, мг КОН на 1 г, не более	0,35	0,1	0,2	0,1
Тангенс угла диэлектрических потерь, не более:				
при 70 °С	0,025	—	—	—
при 90 °С	—	0,005	0,005	0,005

Трансформаторное масло селективной очистки согласно ГОСТ 10121-76 содержит не менее 0,2 % антиокислительной присадки дитретичного бутилпаракрезола (ионол, топанол-0 и др.)

Масло также предназначено для заливки трансформаторов и другой маслonaполненной электроаппаратуры.

*Конденсаторные масла.* Конденсаторные масла используются в бумажно-масляных конденсаторах и служат электроизоляционным материалом, обеспечивающим высокую электрическую прочность и высокие напряженности электрического поля.

Некоторые характеристики конденсаторных масел приведены в табл. 21.4.

Таблица 21.4

Основные свойства конденсаторных масел

Характеристики	Из малосернистой нефти	Из сернистой нефти
Кинематическая вязкость, $\text{м}^2/\text{с}$ (сСт):		
при 20 °С	(37...45)·10 <sup>-6</sup> (37...45)	30·10 <sup>-6</sup> (30)
при 50 °С	(9...12)·10 <sup>-6</sup>	9·10 <sup>-6</sup> (9)
Кислотное число, мг КОН на 1 г масла, не более	0,02	0,02
Зольность, %, не более	0,0015	0,005
Температура вспышки, °С, не ниже	135	160
Температура застывания, °С, не выше	-45	-46
Натриевая проба, балл, не более	1	—

*Кабельные масла.* Кабельные масла используются для пропитки бумажной изоляции силовых кабелей напряжением до 35 кВ, а также заполнения силовых маслonaполненных кабелей с пропитанной бумажной изоляцией на напряжения 110...525 кВ низкого, среднего и высокого давлений. Наличие воды, водорастворимых кислот, щелочей, механических примесей не допускается. Масла различают по вязкости и температуре застывания.

Основные характеристики кабельных масел приведены в табл. 21.5.

Таблица 21.5

Основные характеристики кабельных масел

Показатель	МН-4 масло мало- вязкое для кабе- лей 220 кВ с при- садкой ионола	С-220 масло сред- невязкое для ка- белей 110 кВ и вы- ше	КМ-25 масло высоковязкое для кабелей до 35 кВ с добав- кой октола
Кинематическая вязкость, м <sup>2</sup> /с (сСт):			
при 100 °С	—	11·10 <sup>-6</sup> (11)	25·10 <sup>-6</sup> (25)
при 50 °С	9,6·10 <sup>-6</sup> (9,6)	50·10 <sup>-6</sup> (50)	—
при 20 °С	37,3·10 <sup>-6</sup> (37,3)	800·10 <sup>-6</sup> (800)	—
при -20 °С	650·10 <sup>-6</sup> (650)	—	—
при 0 °С	—	5000·10 <sup>-6</sup> (5000)	—
Кислотное число, мг КОН на 1 г масла, не более	0,04	0,02	0,06
Зольность, %, не более	0,005	0,001	0,007
Температура вспышки, °С	135	180	220
Температура застывания, °С, не выше	-45	-30	-10
Электрическая прочность при частоте 50 Гц, МВ/м, не менее	180	200	160
Прозрачность	Прозрачно	Прозрачно при 15 °С в течение 4 ч	Непрозрачно

## · 21.4.2. Синтетические масла

Синтетические масла — это полимеры, обладающие низкой температурой застывания, малой зависимостью вязкости от температуры, повышенной нагревостойкостью, стабильностью при длительном складском хранении и в рабочем состоянии при 150...200 °С и выше. Жидкости по цвету прозрачны, как вода, химически инертны и стойки против окисления.

Различают электроизоляционные жидкости на основе полиорганосилоксановых (кремнийорганических) соединений (ПОСЖ) и электроизоляционные жидкости на основе хлорированных углеводородов.

ПОСЖ получают на основе мономеров, содержащих хлор, углеводородные и другие органические функциональные группы (органохлорсиланы).

Основные показатели ПОСЖ приведены в табл. 21.6.

Таблица 21.6

## Основные показатели ПОСЖ

Показатель	Тип полиорганосилоксана				
	ПМСЖ		ПЭСЖ	ПМФСЖ	ПХ (Ф) ОСЖ
	ПМС-10	ПМС-20	132-12Д	133-79	161-45
Кинематическая вязкость, $\text{м}^2/\text{с}$ (сСт):					
при 20 °С	(9,2...10,8)·10 <sup>-6</sup> (9,2...10,8)	(18...22)·10 <sup>-6</sup> (18...22)	(70...140)·10 <sup>-6</sup> (70...140)	24,5·10 <sup>-6</sup> (24,5)	720·10 <sup>-6</sup> (720)
при -50 °С, не более	—	2,3·10 <sup>-6</sup> (230)	—	2,5·10 <sup>-6</sup> (260)	—
при -60 °С, не более	1,2·10 <sup>-6</sup> (120)	—	—	—	—
Температура вспышки в открытом тигле, °С, не ниже	172	200	150	200	340
Температура застывания, °С, не выше	-65	-60	-60	-70	-90
Реакция среды (рН водной вытяжки)	6,2...7,0	6,0...7,0	6,0...7,0	—	—
Массовая доля кремния, %	36,0...37,5	37,0...38,5	—	—	—
Массовая доля воды, %, не более	0,004	0,004	Отсутствие	—	—

Электроизоляционные жидкости на основе хлорированных углеводородов. Хлорированные углеводороды, или хлоруглеводороды, получают в результате реакций взаимодействия соответствующих углеводородов (например, дифенила, бензола) с хлором. При этом происходит замещение части атомов водорода в молекуле углеводорода атомами хлора. Для получения широкого по значениям вязкости и другим характеристикам ассортимента жидкостей используют смеси различных хлоруглеводородов, отличающихся по своим физическим и электрофизическим свойствами.

Важным достоинством хлорированных углеводородов является их высокая стойкость к воспламенению. Некоторые из них используют даже как средства пожаротушения (четырёххлористый углерод, гексахлорбутадиен). Хлорированные углеводороды в силу своей полярности отличаются тем, что их электрические характеристики весьма чувствительны к случайным загрязнениям [19].

Характеристики электроизоляционных жидкостей на основе хлорированных углеводородов приведены в табл. 21.7.

Таблица 21.7

Основные физико-химические показатели электроизоляционных жидкостей на основе хлорированных углеводородов

Показатель	Трихлордифенил	Совтол-10	Гексол
Плотность, кг/м <sup>3</sup> , при 20 °С	–1335	1540	1640
Показатель преломления света при 20 °С	1,631	1,636	1,875
Температура застывания, °С	–18	–7	ниже –60
Температура начала кипения при 0,1 МПа, °С	320	221	215
Кинематическая вязкость, м <sup>2</sup> /с:			
при 90 °С	3·10 <sup>–6</sup>	4·10 <sup>–6</sup>	—
при 50 °С	126·10 <sup>–6</sup>	25·10 <sup>–6</sup>	1,8·10 <sup>–6</sup>
при 20 °С	126·10 <sup>–6</sup>	650·10 <sup>–6</sup>	3,9·10 <sup>–6</sup>
при –40 °С	—	—	100·10 <sup>–6</sup>
Удельная теплоемкость при 20 °С, Дж/(г·°С)	1,21	1,59	0,964
Теплопроводность, Вт/(м·°С):			
при 20 °С	0,0986	—	0,15
при 50 Гц и 90 °С	0,025	0,100	0,010
Пробивное напряжение в стандартном разряднике между электродами на расстоянии 2,5 мм, кВ, не менее	50 (при 65 °С)	50 (при 65 °С)	60 (при 20 °С)

## 21.5. Высокополимерные диэлектрики (смолы)

Высокополимерные диэлектрические материалы смолы — аморфные вещества, представляющие собой сложные смеси высокомолекулярных соединений. Различают смолы природного происхождения и синтетические.

### 21.5.1. Смолы природного происхождения

К природным смолам относятся: канифоль, копал, натуральный каучук, шеллак, янтарь и др.

Канифоль получают из смолы хвойных деревьев. Используются для изготовления лаков и компаундов; в качестве составной части электроизоляционных смол; флюса для пайки меди.

Копал — ископаемая природная смола, окраска ее — от бесцветной до коричневой, используют для приготовления высококачественных масляно-смоляных лаков.

Шеллак — воскоподобное вещество, выделяемое одним из видов тропических насекомых, применяется для изготовления клеящих лаков и лакировки деталей, спиртовых растворов в производстве слюдяных изделий.

Янтарь — ископаемая смола хвойных деревьев палеогенового периода. Приблизительная химическая формула  $C_{10}H_{16}O_4$ . В электротехнике янтарь используется в качестве изоляторов в некоторых электроизмерительных приборах.

Некоторые свойства природных смол и их растворители приведены в табл. 21.8.

Таблица 21.8

Природные смолы

Наименование	Плотность, кг/м <sup>3</sup>	Температура размягчения, °С	Удельное электрическое сопротивление при 20 °С, Ом·м	Растворитель
Канифоль	1070...1090	54...68	$10^{17}...10^{18}$	Спирт, бензин, бензол, скипидар, ацетон, нефтяные и растительные масла
Копал	1030...1090	75...170	$10^{17}...10^{18}$	Спирт, эфир
Шеллак	1000...1040	50...60	$10^{17}...10^{18}$	Спирт и частично ацетон
Янтарь	1050...1096	175...200	До $10^{21}$	Почти нерастворим. Расплавленный — растворяется в скипидаре, сероуглероде, бензине и масле

## 21.5.2. Синтетические полимеры (смолы)

Синтетические смолы получают искусственным путем. Различают: фенолформальдегидные, алкидные, полиэфирные, эпоксидные, кремнийорганические и другие виды смол.

Смолы используются для изготовления литьем под давлением изделий конструкционного и электроизоляционного назначения, для заливки и герметизации радио- и электротехнических изделий, изготовления слюдяных материалов, лакирования и т. д. Весьма широко в электротехнике применяются эпоксидно-диановые смолы — растворимые и плавкие термопластичные полимерные продукты конденсации эпихлоргидрина и дифенилпропана в присутствии щелочей.

Характеристики некоторых синтетических смол приведены в табл. 21.9.

Таблица 21.9  
Характеристики некоторых синтетических смол

Наименование смолы	Плотность, кг/м <sup>3</sup>	Удельное электрическое сопротивление при 20 °С, Ом·м	Растворитель	Применение
Глифталевая 1350	1100...1450	$10^{11}...10^{12}$	Смесь этилового спирта и бензола	Для изготовления миканитов
Крезольно-формальдегидная	1250...1300	$10^9...10^{10}$	Этиловый спирт	Для лакирования изоляционных лент
Кремнийорганическая К-40, К-42, 133-101	1600...1750	$10^{12}...10^{14}$	Смесь бензола, толуола и ацетона	В производстве нагревостойких формовочных миканитов нагревостойкости класса Н
Полиамидные смолы	1130...1150	$10^{11}...10^{12}$	Фенолы, муравьиная и уксусная кислоты	Для изготовления каркасов катушек, изоляционных пленок и нитей
Полиэфирные	—	—	Ацетон	Для изготовления слюдяной изоляции класса F
Фенолформальдегидная	1250...1300	$10^{10}...10^{12}$	Этиловый спирт, ацетон, эфиры	Для горячего прессования различных деталей

Эпоксидные смолы имеют плотность 1110...1230 кг/м<sup>3</sup>, удельное электрическое сопротивление при 20 °С находится

в пределах до  $10^{14}$  Ом·см. В качестве растворителя для эпоксидных смол применяют дибутилфталат.

Эпоксидные смолы применяют для изготовления заливочных компаундов, которые используют в качестве клея, для заливки электрических машин, для крупногабаритных отливок, в качестве связующего для стеклопластиков и других целей. Эпоксидная смола Э-40 используется для изготовления высокомолекулярных эпоксидных смол.

Характеристики некоторых эпоксидно-диановых смол представлены в табл. 21.10.

Таблица 21.10

Основные свойства эпоксидно-диановых смол

Показатель	ЭД-22	ЭД-20	ЭД-16	ЭД-14	ЭД-10	ЭД-8
Содержание эпоксидных групп, %	22,1... 23,5	19,9... 22,0	16,0... 18,0	13,9... 16,9	10,0... 13,0	8,0... 10,0
Содержание хлора, %, не более	0,50	0,60	0,50	0,60	0,60	0,60
Содержание гидроксильных групп, %, не более	1,0	1,7	2,5	—	—	—
Содержание летучих веществ, %, не более	0,40	0,60	0,20	0,60	0,60	0,60
Динамическая вязкость, Па·с:						
при 25 °С	7...12	12...18	—	—	—	—
при 50 °С	—	—	3...20	20...40	—	—
Условная вязкость при 50 °С	—	—	35...66	15...100	—	—
Температура размягчения, °С, не выше	—	—	—	—	60	65
Время желатинизации с отвердителем, ч, не менее	9,0	6,0	3	2,3	2,0	2,0
Условная вязкость смолы с отвердителем по шариковому вискозиметру при 100 °С, с, не более	10	10	20	20	50	60

Синтетические высокополимеры образуются в процессе реакций полимеризации или поликонденсации. Высокополимерные материалы, которые состоят из линейных ориентированных молекул (например, каучуки, резины), обладают гибкостью, то-

гда как высокополимерные материалы, состоящие из пространственно развитых молекул (бакелиты, глифтали и др.), гибкостью не обладают.

Линейные полимеры, как правило, являются веществами термопластичными: они размягчаются при нагреве. Из термопластичных полимеров изготавливают гибкие изделия: пленки, нити, литые детали.

Высокополимерные материалы, состоящие из пространственно развитых молекул, являются, как правило, веществами термореактивными. Эти материалы после термической обработки переходят в неплавкое и нерастворимое состояние (бакелиты, глифтали и др.).

Высокополимерные материалы выпускаются промышленностью в виде полуфабрикатов: порошков, гранул, а также в виде листов, пластин и тонких пленок, которые затем перерабатываются в электроизоляционные изделия.

Физические свойства некоторых синтетических высокополимерных материалов приведены в табл. 21.11, характеристики и электрические свойства этих материалов — в табл. 21.12.

Таблица 21.11

Физические свойства некоторых синтетических  
высокополимерных материалов

Наименование	Плотность, кг/м <sup>3</sup>	Предел прочности			Теплостойкость по Мартенсу, °С	Холодостойкость, °С
		при растяжении, МПа	при статическом изгибе, МПа	при ударном изгибе, кДж/м <sup>2</sup>		
Полистирол	1050	35...50	95...100	6...20	78...80	-60
Полистирол ударопрочный стабилизированный	1100	30	55...65	40...50	75	-60
Полиэтилен низкой плотности (высокого давления)	920	10...14	20...150	Не ломается	55...60	-50...-70
Полиэтилен высокой плотности (низкого давления)	960	22...23	20...35	Не ломается	60...70	-60
Полипропилен	910	30...35	90...110	70...80	160...170*	-20
Полиформальдегид	1100	70	100	90...100	100	-45
Полиуретан	1210	50...60	70...80	50...60	60	-35

Наименование	Плотность, кг/м <sup>3</sup>	Предел прочности			Теплостойкость по Мартенсу, °С	Холодостойкость, °С
		при растяжении, МПа	при статическом изгибе, МПа	при ударном изгибе, кДж/м <sup>2</sup>		
Поликапролактамы (капрон)	1140	50...80	80...95	150...170	50...55	-25
Полиметилметакрилат (органическое стекло)	1190	60...70	60...65	10...18	60...70	-60
Пластикат поливинилхлоридный	1340	18...25	Не ломается	Не ломается	170...180*	-25...-50
Винипласт	1400	40...50	10...12	90...120	60...70	-15
Полиэтилентереталат (лавсан)	134	20...30	70...90	15...30	255 **	-55
Фторопласт-3	2100...2180	30...40	60...80	16...20	70...75	-185
Фторопласт-4	2140...2250	35...40	120...140	120...150	200...250	-195
Эскапон	980...1000	45...60	50...60	10...20	130...150	-60
Эбонит	1150...1250	30...50	70...100	4...15	50...58	-50

\* Температура размягчения.

\*\* Температура плавления.

Таблица 21.12

Характеристики и электрические свойства некоторых синтетических высокополимерных материалов

Наименование, общая характеристика и область применения	Электрические характеристики при 20 °С			
	$\rho$ (объемное), Ом·м	$\epsilon_r$ при 50 Гц	$\operatorname{tg} \delta$ при 50 Гц	$E_{\text{пр}}$ кВ/мм
Винипласт. Негорючий термопластичный ударопрочный химически стойкий материал. Применяют для изготовления конструкций и деталей, стойких к удару и агрессивным средам	$10^{12}$	3,5...4,0	$(1...5) \cdot 10^{-2}$	20
Полистирол. Прозрачный термопластичный материал. Применяют для изготовления каркасов, катушек, изоляционных плат и пленок	$10^{13}...10^{15}$	2,4...2,7	$(2...4) \cdot 10^{-4}$	25...30

Наименование, общая характеристика и область применения	Электрические характеристики при 20 °С			
	$\rho$ (объемное), Ом·м	$\epsilon_r$ при 50 Гц	$\operatorname{tg}\delta$ при 50 Гц	$E_{\text{пр}}$ кВ/мм
Полистирол ударопрочный. Непрозрачный термопластичный материал. Область применения та же, что и у полистирола	$10^{13}$	2,6	$6 \cdot 10^{-4}$	25
Полиэтилен низкой плотности (высокого давления). Непрозрачный термопластичный материал, обладает гибкостью, стойкостью к воде и растворителям. Применяют в качестве гибкой изоляции проводов и кабелей	$10^{13} \dots 10^{15}$	2,3	$(2 \dots 3) \cdot 10^{-4}$	40...42
Полиэтилен высокой плотности (низкого давления). Непрозрачный термопластичный материал, стойкий к воде и растворителям. Применяют для изготовления каркасов, катушек, плат и других изделий	$10^{13} \dots 10^{15}$	2,4	$5 \cdot 10^{-4}$	40...42
Полипропилен. Прозрачный термопластичный материал, стойкий к воде и растворителям. Область применения та же, что и у полистирола	$10^{13} \dots 10^{15}$	2,1	$(2 \dots 3) \cdot 10^{-4}$	30...35
Полиформальдегид. Непрозрачный термопластичный материал с повышенными механическими и антифрикционными свойствами и малой усадкой. Область применения та же, что и у полистирола	$10^{12} \dots 10^{13}$	3,7	$(3 \dots 5) \cdot 10^{-4}$	24
Полиуретан. Непрозрачный термопластичный материал с повышенными механическими свойствами. Область применения та же, что и у полистирола и полипропилена. Кроме того, применяется для изготовления лаков и пенoplastов	$10^{12} \dots 10^{13}$	4,6	$12 \cdot 10^{-3}$	20...25
Поликапролактam (капрон). Непрозрачный термопластичный материал. Обладает повышенным водопоглощением (8...10%). Применяют для изготовления деталей низкого напряжения	$10^{11} \dots 10^{12}$	4,0	$(25 \dots 40) \cdot 10^{-3}$	16...20

Наименование, общая характеристика и область применения	Электрические характеристики при 20 °С			
	$\rho$ (объемное), Ом·м	$\epsilon_r$ при 50 Гц	$\operatorname{tg}\delta$ при 50 Гц	$E_{\text{пр}}$ кВ/мм
Полиметилметакрилат (органическое стекло). Прозрачный термопластичный материал. Применяют для изготовления электроизоляционных и конструкционных деталей	$10^{10} \dots 10^{12}$	3,6	$6 \cdot 10^{-2}$	15...18
Пластикат поливинилхлоридный. Негорючий термопластичный химически стойкий материал, обладающий значительной гибкостью. Применяют в качестве гибкой изоляции проводов и для изготовления трубок, шлангов и лент	$10^{10} \dots 10^{12}$	4,7	$(3 \dots 8) \cdot 10^{-2}$	15...20
Полиэтилентерефталат (лавсан) Прозрачный термопластичный химически стойкий материал. Применяют в виде литых изделий и пленок в изоляции электрических машин и аппаратов	$10^{12} \dots 10^{13}$	3,5	$(2 \dots 6) \cdot 10^{-3}$	30
Фторопласт-3. Термопластичный химически стойкий роговидный негорючий материал. Применяют в виде пленок и прессованных изделий	$10^{14} \dots 10^{15}$	2,5-3,0	$(10 \dots 15) \cdot 10^{-3}$	15...20
Фторопласт-4 и его модификации. Непрозрачный химически стойкий негорючий и нерастворимый материал. Может применяться до температур 250 °С. Применяют в виде пленок и прессованных изделий	$10^{16} \dots 10^{18}$	2,0	$(1 \dots 3) \cdot 10^{-4}$	27...40
Эскапон. Твердый роговидный материал желтого цвета, поддающийся всем видам механической обработки. Выпускают в виде брусков, плит и труб. Применяют в качестве изоляции в электроприборах	$10^{13} \dots 10^{14}$	2,8...3,0	$(5 \dots 8) \cdot 10^{-4}$	30...35
Эбонит. Твердый, роговидный материал на основе каучуков. Поддается всем видам механической обработки и горячей штамповке. Применяют в качестве изоляции в электроприборах	$10^{12} \dots 10^{14}$	3,0...3,5	$(5 \dots 10) \cdot 10^{-3}$	15...20

## 21.6. Электроизоляционные лаки

Электроизоляционные лаки — это жидкие материалы, которые представляют собой раствор диэлектриков (лаковой основы) в летучих растворителях. В качестве пленкообразующих веществ используются различные высокополимерные смолы, битумы, масла. После улетучивания растворителя пленкообразующее вещество превращается в твердую изолирующую лаковую пленку.

Лаки классифицируются по назначению, химическому составу лаковой основы, режиму сушки. По назначению лаки делят на три основных вида: *пропиточные*, *покровные* и *клеящие*.

Пропиточные лаки служат для пропитки изоляции обмоток электрических машин и аппаратов, а также для производства лакотканей, лакобумаг.

Покровные лаки предназначены для образования защитного лакового покрытия на пропитанных обмотках, предохраняющего изоляцию от механических повреждений, загрязнений, химических агентов и т. п., покрытия различных деталей, лакировки электротехнической стали.

Клеящие лаки служат для склеивания различных материалов, склеивания пластинок шипаной слюды между собой, а также с бумагой и тканями при изготовлении миканитов, склеивания пленочных материалов с бумагой, картоном в производстве композиционного пленкоэлектрокартона.

По режиму сушки лаки разделяются на лаки печной, или горячей сушки, и лаки воздушной, или холодной сушки. Температура высыхания лаков печной сушки для образования лаковой пленки с необходимыми свойствами 100 °С и выше. Лаки воздушной сушки высыхают при температуре до 25 °С.

По химическому составу лаковой основы различают *маслосодержащие*, *смоляные* и *кремнийорганические*. Маслосодержащие лаки делятся на масляные, масляно-битумные, масляно-канифольные, масляно-алкидные. Основой масляных лаков являются высыхающие растительные масла. Это лаки печной сушки. Масляно-битумные лаки — печной сушки, черного цвета, изготавливаются на основе битумов и высыхающих растительных масел. Масляно-канифольные лаки печной сушки изготавливаются из высыхающих растительных масел и препаратов канифоли с добавлением сиккативов. Пленки лаков обладают хорошей эластичностью, маслостойкостью и твердостью. Все маслосодержащие лаки имеют класс нагревостойкости А.

*Масляно-алкидные лаки* — это алкидные смолы печной сушки, модифицированные растительными маслами. Обладают высокой клеящей способностью по отношению к слюде, металлам и другим материалам. Классы нагревостойкости Е и В.

Смоляные лаки представляют собой растворы природных или синтетических смол в различных растворителях.

Кремнийорганические лаки изготовляют на основе полиорганосилоксановых соединений. Это лаки печной сушки. Они отличаются высокой нагревостойкостью (класс Н) и влагостойкостью и могут длительно работать при температуре 180 °С, а некоторые из них — при 200...250 °С.

В табл. 21.13 приведены основные свойства масляно-битумных лаков: клеящего БТ-95, покровного БТ-99 и пропиточного БТ-963. В табл. 21.14 приведены основные свойства масляно-битумных пропиточных лаков.

Таблица 21.13

Основные свойства масляно-битумных лаков

Показатель	БТ-95	БТ-99	БТ-963
Условная вязкость по ВЗ-4 при 20 °С, с	15...35	30...60	—
Содержание нелетучих веществ, %, не менее	38	42	42
Время высыхания до степени 2 при 20±2 °С, ч, не более	16	3	—
Теплостойкость пленки лака при 150 °С, ч, не менее	15	1	48
Электрическая прочность пленки, МВ/м, не менее			
при 20±2 °С	70	56	50
после действия воды в течение 24 ч при 20±2 °С	22	20	35 при 130 °С
Стойкость пленки против разбрызгивания при 150 °С	—	Не разбрызгивается	—

Таблица 21.14

Основные свойства масляно-битумных пропиточных лаков

Показатель	БТ-980	БТ-987	БТ-988
Условная вязкость при 20 °С, с	30...60	30...60	30...60
Содержание сухого остатка, %, не менее	40	40	40
Время высыхания при 105...110 °С, ч, не более	10	6	3
Термозластичность пленки при 150 °С, ч, не менее	12	8	5
Электрическая прочность пленки, МВ/м, не менее:			
при 20 °С	60	55	55
при 90 °С	30	25	25
после действия воды в течение 24 ч при 20 °С	22	22	20

Основные свойства масляно-алкидных и полиэфирных лаков представлены в табл. 21.15, полиэфирно-эпоксидных пропиточных и клеящих лаков — в табл. 21.16, а кремнийорганических лаков — в табл. 21.17 [19].

Таблица 21.15

## Основные свойства масляно-алкидных и полиэфирных лаков

Показатель	ГФ-95	ГФ-957	ГФ-937	ГФ-956	ГФ-985	ПЭ-969	ГФ-962	МЛ-92	ФЛ-98	ПЭ-933	ПЭ-935	ПЭ-936
Условная вязкость при 20 °С, с	30...50	10...20	18	11	30...50	11...14	30...60	25	35...60	30...60	35...60	90...120
Содержание сухого остатка, %, не менее	45	25...50	30	34	60	30...33	45	50	50	50...55	50	50
Продолжительность высыхания, ч (при температуре, °С), не более	2 (105)	3 (20)	1...3 (105)	2 (105)	0,3 (210)	2 (105)	5 (20)	1 (105)	2 (120)	2 (150)	2 (150)	1 (160)
Кислотность, мг КОН на 1 г, не более	12	—	10	—	—	3,5...10	—	10	10	7...12	—	—
Теплостойкость пленки лака при 150 °С, ч, не менее	48	—	48	20	—	30	20 при 105 °С	48	30	—	—	—
Электрическая прочность, МВ/м, не менее:												
при 20 °С	70	30	70	60	40	60	60	66	75	80	70	70
при 155 °С	—	—	—	—	—	—	—	—	40 при 130 °С	40	40	40
после действия воды в течение 24 ч	20	—	20	15	—	20	—	30	45	40	—	—
после пребывания 24 ч в атмосфере с относительной влажностью 95% при 20 °С	—	—	—	—	40	—	—	—	—	—	40	40
Удельное объемное сопротивление, Ом·м, при 20 °С	—	—	—	—	—	—	—	10 <sup>12</sup>	—	10 <sup>12</sup>	10 <sup>12</sup>	10 <sup>11</sup>

Таблица 21.16

Основные свойства полиэфирно-эпоксидных пропиточных и клеящих лаков

Показатель	ПЗ-942	ПЗ-948	ПЗ-951	ПЗ-953	ПЗ-970	ЭП-934	ЭП-9125	СЭНП-526	ЭПМ-63	АС-9115	Б-ИД-9127
Условная вязкость по ВЗ-4 при 20 °С, с	50...100	20...33	30...60	30...60	35...55	30...80	30...55	20	18	35	30...100
Содержание сухого остатка, %, не менее	50	60	60	50...65	60	60	50	70	70	90	97
Продолжительность высыхания, ч (при температуре, °С), не более	1 (180)	1 (150)	0,5 (130)	2 (130)	150	150	150	150	150	20	—
Кислотность, мг КОН на 1 г, не более	—	—	—	7...10	—	10	50	—	—	—	—
Электрическая прочность, МВ/м, не менее:											
при 20 °С	—	70	80	60	70	70	60	—	—	20	25
при 186 °С	—	50	40	25	40 при 130 °С	25	30 при 130 °С	—	—	—	—
после действия воды в течение 24 ч	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
после пребывания 24 ч в атмосфере с относительной влажностью 95% при 20 °С	—	40	40	—	40	40	—	—	—	—	—
Удельное объемное сопротивление, Ом·м, при 20 °С	—	10 <sup>12</sup>	10 <sup>12</sup>	—	5·10 <sup>11</sup>	10 <sup>13</sup>	—	—	—	10 <sup>12</sup>	10 <sup>12</sup>

Таблица 21.17

## Основные свойства кремнийорганических лаков

Показатель	КО-991-1 КО-991-4	КО-915	КО-916	КО-917	КО-919	КО-921 КО-922	КО-923	КО-926	КО-928	КО-945	КО-946
Содержание нелетучих веществ, %	40	60	67	70	70	50	50...55	50	45	70	50
Условная вязкость, с	15...70	30...70	45...65	100...180	70...170	17...27	—	14...22	12...18	93...160	20...40
Продолжительность высыхания лаковой пленки, мин, не более	1	0,6...1,5	—	1,5	—	3...1	0,5	—	—	—	1
Термоэластичность пленки лака, ч, не менее	20	75	50	180	—	75	100	—	—	70	300
Электрическая прочность пленки лака, МВ/м, не менее:											
при 20±5 °С	65	70	70	60	70	70	50	—	70	60	75
при 180±2 °С	25	28	35	25	35	35	25	—	35	—	35
последствия воздуха с относительной влажностью 95...98% в течение 24 ч при 20±1 °С	25	60	40	25	40	36	25	—	35	—	40

## 21.7. Электроизоляционные эмали

Электроизоляционными эмалями называют составы, получаемые при пигментировании покровных лаков. В качестве пигментов применяют мелкодисперсный наполнитель, который придает эмалям определенный цвет, повышает твердость лаковой пленки, увеличивает искростойкость и дугостойкость эмали.

Различают эмали на основе глифталевых лаков, эпоксидных смол, кремнийорганических лаков и др., печной или воздушной сушки. Марки, особенности и область применения некоторых эмалей приведены в табл. 21.18.

Таблица 21.18

Марки, особенности и область применения эмалей

Марки и состав эмалей	Область применения
Эмаль ГФ-92ГС — глифтале-масляная эмаль серого цвета печной сушки (100...150 °С). Пигменты — литопон и пиролюзит; растворители и разбавители — смесь уайт-спирита и бензола или толуола. Пленки эмали после сушки при 105 °С обладают маслостойкостью и дугостойкостью	Применяется для защитного покрытия неподвижных и вращающихся частей электрических машин и аппаратов для получения твердого, механически прочного электроизоляционного покрытия, стойкого к действию минеральных масел, защищает основную изоляцию от кратковременного воздействия электрической дуги и поверхностных разрядов
Эмаль ГФ-92ХК — глифтале-масляная эмаль, красного цвета, воздушной сушки, пигментирована железным суриком. Разбавитель — смесь толуола и бутилацетата. Пленка эмали гладкая, твердая, без морщин, бензо-, масло- и дугостойкая	Применяется для покрытия перед окончательной отделкой покровным лаком частей обмотки и изоляционных деталей электрических машин и аппаратов, выступающих частей манжет якорей и т. д.
Эмали МЛ-160, МЛ-165, МЛ-165ПМ молотковые — суспензии пигментов и наполнителя в смеси растворов алкидной и меламиноформальдегидной смол с добавлением кремнийорганического жира	Применяется для окраски приборов. МЛ-160 и МЛ-165 — полуматовые эмали серебристого, серого, зелено-голубого, красно-коричневого, голубого и других цветов. МЛ-165ПМ — черного цвета
Эмали ЭП-51 — растворы алкидно-эпоксидной смолы Э-30 и коллоксилина в смеси летучих органических растворителей с добавлением пигментов и пластификаторов. Цвета: белый, желтый, красный, серый, синий, зеленый, защитный и черный.	Применяются для окраски металлических изделий с целью защиты от коррозии в атмосферных условиях

Марки и состав эмалей	Область применения
<p>Эмаль ЭП-91 — эпоксидная покровная эмаль темно-зеленого цвета. Представляет собой суспензию пигментов в эпоксидном лаке.</p> <p>Эмаль отличается водостойкостью и высокими электроизоляционными свойствами</p>	<p>Применяется для покрытия изоляционных деталей и узлов приборов влагозащищенного исполнения. Эмаль наносится методом окунания или распыления не менее чем в два слоя</p>
<p>Эмаль эпоксидная ЭП-274 черная полуглянцевая — раствор эпоксидной смолы Э-49, меламиноформальдегидной смолы К-421-02 и полиэфира себаценовой кислоты № 24 в летучих органических растворителях с добавлением пигментов. Интервал рабочих температур от -60 до +180 °С. Разбавитель эмали — смесь ацетона, этилцеллозольва и ксилола</p>	<p>Эмаль применяется для покрытия вакуумных конденсаторов, различных деталей из алюминевых и медных сплавов</p>
<p>Эмаль ЭП-773 зеленая, кремовая — раствор эпоксидной смолы Э-41 в смеси органических растворителей с добавлением соответствующих пигментов, наполнителей. Отличается высокими электрическими свойствами, нагрево- и щелочестойкостью</p>	<p>Эмаль применяют в качестве защитного покрытия низковольтных трансформаторов, а также для окраски металлических поверхностей, подвергающихся действию горячих растворов щелочей</p>
<p>Эмаль КО-936 кремнийорганическая, нагревостойкая, покровная, печной сушки, розового цвета на основе лака К-48, пигментированного двуокисью титана с железным суриком. Растворитель и разбавитель — толуол. Пленка эмали после соответствующей термической обработки при 180...190 °С становится влаго- и маслостойкой</p>	<p>Применяется для покрытия лобовых частей обмоток секций, катушек, якорей и других деталей и узлов электрических машин, длительно работающих при 180 °С, или при повышенной влажности</p>
<p>Эмаль КО-935 — кремнийорганическая, нагревостойкая, покровная эмаль низкотемпературной сушки — красочная суспензия пигментов в полиорганосилоксановом лаке К-54. Пигменты: железный сурик и двуокись титана. Растворитель и разбавитель — толуол. Эмаль обладает высокой нагревостойкостью и высокими электроизоляционными свойствами, тропикостойкостью, повышенными твердостью и маслостойкостью</p>	<p>Применяется для покрытия лобовых частей катушек обмоток и упругих узлов и деталей электрических машин с изоляцией класса Н, длительно работающих при 180 °С, или в тех случаях, когда требуется сушка изоляции при пониженной температуре (120...125 °С)</p>
<p>Эмаль КО-911 — кремнийорганическая, нагревостойкая, покровная, воздушной сушки, суспензия пигментов в полиорганосилоксановом лаке К-65, двух цветов: розовая и красно-коричневая. Разбавитель и растворитель — толуол. Применяют с добавлением отвердителя полиэтиленполиамин. Эмаль обладает высокими электроизоляционными свойствами и маслостойкостью</p>	<p>Применяют для отделочного покрытия и ремонта якорей, лобовых частей секций, катушек и других узлов и деталей электрических машин и аппаратов с рабочей температурой до 180 °С</p>

Марки и состав эмалей	Область применения
Эмали КО-10ВМ, КО-20ВМ — электроизоляционные, жаростойкие. Представляют собой суспензию порошка слюдинитовой бумаги, окислов алюминия, кремния, хрома и кобальта в полиорганосилоксановых лаках КО-812 и КО-554	Предназначены для подклейки, пропитки и лакировки волокнистой изоляции при изготовлении обмоточных проводов, а также для пропитки обмоток электротехнического оборудования
Эмаль КО-976 электроизоляционная, представляет собой суспензию пигмента в растворе кремнийорганического связующего	Эмаль применяется для перекрытия сборочных узлов и деталей электрических машин с длительной рабочей температурой до 180 °С, эксплуатируемых при температуре окружающей среды до -60 °С

Электрическая прочность эмалей находится в пределах от 50 МВ/м (КО-976) до 40 МВ/м (ГФ-92ГС) при 20 °С. Удельное объемное электрическое сопротивление в пределах  $10^{10} \dots 10^{11}$  Ом·м.

## 21.8. Компаунды

Электроизоляционные компаунды — жидкие или размягчающиеся до жидкого состояния составы, отверждающиеся в конечном состоянии. Широко используются компаунды на основе эпоксидных или полиэфирных смол, канифоли. По назначению компаунды делят на *пропиточные* и *заливочные*. Пропиточные компаунды применяют для пропитки обмоток электрических машин и аппаратов. Заливочные компаунды предназначены для заливки электротехнических устройств: трансформаторов, дросселей, полостей в кабельных муфтах.

Марки, свойства и области применения компаундов приведены в табл. 21.19. В табл. 21.20 приведены электрические характеристики некоторых компаундов.

## Марки, свойства и области применения компаундов

Марки и свойства компаундов	Область применения
<p>Компаунды термореактивные МБК — пропиточные и заливочные составы, получаемые сополимеризацией бутилметакридата с полиэфиром ТГМ-3 (диметилакрилаттриэтиленгликоль), отверждаются при 70...100 °С без отвердителя и при 20 °С с введением отвердителя. Модификации:</p> <p>МБК-1 — сополимер без пластификатора, в отвержденном состоянии образует твердые продукты полимеризации;</p> <p>МБК-2 — сополимер с добавкой трикрезилфосфата;</p> <p>МБК-3 — сополимер с добавкой диоктилсебацinata. Компаунды обладают высокой пропитывающей способностью; в твердом состоянии они отличаются высокой водостойкостью и механической прочностью; инертны по отношению к меди, устойчивы против растрескивания. МБК-2 и МБК-3 образуют эластичные резиноподобные полимеры</p> <p>Компаунд К-30 — прозрачная жидкость желтого цвета. При нагревании образует твердый эластичный полимер</p> <p>Компаунд КТ-102 — твердый эластичный прозрачный полимер, получаемый из касторового масла и продукта 102-т</p> <p>Компаунд К-31 — прозрачная жидкость желтого цвета. При нагревании компаунда при 60 °С образуется твердый эластичный полимер</p> <p>Компаунд К-115 — композиция из эпоксидно-диановой смолы ЭД-5 и полиэфира МГФ-9. Компаунд изготовляют без наполнителей и с наполнителями, в качестве которых служат плавный кварц вибропомола, пылевидный кварц, маршалит, слюдяная мука и тальк. В качестве отвердителя компаунда применяют полиэтилен-полиамин, малеиновый ангидрид, отвердители № 254, Т-14 и др.</p>	<p>Применяют для пропитки и герметизации электрических обмоток и блоков, работающих в условиях высокой влажности</p> <p>МБК-1 применяют для изделий, работающих при повышенных нагревах, к которым предъявляются требования высокой морозостойкости</p> <p>МБК-2 применяют для тех же изделий, но более крупных габаритов и без повышенных требований к электроизолирующим свойствам</p> <p>МБК-3 применяют для радиотехнических и аналогичных изделий, к которым предъявляются требования высокой морозостойкости</p> <p>Применяется для заливки деталей, работающих при температурах от -80 до +60 °С</p> <p>Применяют в качестве демфирующего материала для заливки деталей, работающих при температурах от -60 до +80 °С</p> <p>Применяется для заливки различных деталей, работающих в интервале от -80 до +120 °С</p> <p>Компаунд применяют для пропитки, обволакивания, заливки, склейки и герметизации различных радиодеталей и узлов</p>

Марки и свойства компаундов	Область применения
<p>Компаунд К-153 — композиция из эпоксидно-диановой смолы ЭД-5, полиэфира МГФ-9 и тиксола. Изготавливают без наполнителя и с наполнителем. В качестве наполнителя применяют цемент, кварц и др. В качестве отвердителей применяют гексаметилендиамин, полиэтиленполиамин, малеиновый ангидрид и др.</p>	<p>Компаунд применяют для склеивания различных материалов, литой изоляции, обволакивания и пропиток</p>
<p>Компаунд К-168 — эпоксидно-диановая смола ЭД-6, пластифицированная полиэфиром МГФ-9. В зависимости от условий эксплуатации компаунд применяется с наполнителем. В качестве отвердителя используется гексаметилендиамин, полиэтиленполиамин, малеиновый ангидрид, отвердитель № 254 и др. Отверждение компаунда производится при 20 °С. Отличается высокой механической прочностью, твердостью, водостойкостью, стойкостью к грибковой плесени</p>	<p>Компаунд применяют для пропитки, обволакивания, склейки и герметизации различных деталей и узлов аппаратуры, для защиты радиоаппаратуры от действия влаги и грибковой плесени при рабочих температурах от -60 до +120°С. По нагревостойкости относится к классу Е</p>
<p>Компаунд К-201 — эпоксидно-диановая смола ЭД-5, пластифицированная полиэфиром МГФ-9 с наполнителем или без него. Наполнители: плавленный кварц вибропомола, пылевидный кварц, маршалит, слюдяная мука, тальк, асбестоцемент, органические наполнители, порошкообразные металлы. Отвердителями компаунда служат полиэтиленполиамин малеиновый или фталевый ангидриды, отвердитель № 254 и др.</p>	<p>Компаунд применяют для пропитки, обволакивания, заливки, склейки и герметизации различных деталей и узлов аппаратуры</p>
<p>Компаунд К-293 — эпоксидно-диановая смола ЭД-6, пластифицированная дибутилфталатом и полиэфиром МГФ-9. Наполнитель — пылевидный кварц. Отвердители: гексаметилендиамин, полиэтиленполиамин, малеиновый или фталевый ангидрид, отвердитель № 254 и др. Отверждается при 120 °С в течение 2 ч. Обладает высокой стойкостью к воде и грибковой плесени, отличается высокой механической прочностью и морозостойкостью</p>	<p>Компаунд применяют для литой изоляции трансформаторов тока напряжением до 10 кВ и для защиты радиоаппаратуры от действия влаги и грибковой плесени при рабочих температурах от -60 до +120°С. Применяется также для пропитки, обволакивания, заливки, склейки и герметизации различных деталей и узлов</p>
<p>Компаунд ЭПСК — эпоксидиополиэфирно-стирольный, пропиточный и представляет собой вязкую жидкость, состоящую из эпоксидной смолы, полиэфира, малеинового ангидрида, перекиси бензоила в стироле или в ТГМ-3</p>	<p>Компаунд применяют для пропитки стержневых обмоток турбо- и гидрогенераторов. Интервал рабочих температур от -60 до +130 °С</p>
<p>Компаунд 110 — пропиточный; по внешнему виду — вязкая жидкость</p>	<p>Применяется для пропитки стеклослюдинитовых лент</p>

Марки и свойства компаундов	Область применения
Компаунд Вискит К-18 — нагревостойкий эластичный материал, получаемый на основе пасты К и катализатора № 18. При их смешивании при 20 °С происходит вулканизация пасты К, которая переходит в резиноподобное состояние	Применяют для герметизации электро- и радиоизделий, работающих в интервале температур от -60 до +250 °С и в условиях повышенной влажности
Компаунд К-43 — кремнийорганический, терморезистивный, пропиточный; изготавливается на основе полиметилфенил-1 силоксана с введением катализатора (линолеата свинца). Отличается нагревостойкостью, влагостойкостью и сохранением вязкости при компаундировании	Применяют для пропитки обмоток низковольтных и высоковольтных электрических машин, работающих при 180 °С и в условиях повышенной влажности
Компаунд МК-45 для заливки кабельных муфт изготавливается на основе автотракторного масла АК-10 или цилиндрического масла с канифолью. Температура каплепадения 45 °С	Применяют для заливки кабельных соединительных и концевых муфт внутренней установки на 20 и 35 кВ
МБМ для заливки кабельных муфт изготавливается на основе сплавов битумов различных марок (БН-III, БН-III-У, БН-V) с трансформаторным маслом. Температура каплепадения 55 °С. Температура заливки 130...140 °С	Применяют для заливки соединительных и концевых воронок на рабочее напряжение до 10 кВ, для наружных установок с температурой до -45 °С
Компаунды МБ-70/60 и МБ-90/75 для заливки кабельных муфт являются сплавами нефтяных битумов (БН-III, БН-III-У, БН-V). Цифры 70 и 90 в марках обозначают температуры каплепадения в °С. Температуры заливки для МБ-70: 160...170 °С; для МБ: 180...190 °С	МБ-70/60 предназначен для заливки соединительных и концевых воронок на напряжения до 10 кВ, установленных в неотапливаемых помещениях при температуре до -10 °С. МБ-90/75 — для тех же целей, что и МБ-70/60, но для воронок, установленных в отапливаемых помещениях

Таблица 21.20

Электрические характеристики некоторых компаундов

Показатель	К-30	К-31	КТ-102	КТ-115	К-153	К-168	ЭПСК	110	К18	К-43
Электрическая прочность, МВ/м, при 20 °С, не менее	27	27	20	20	15	—	20	25	15	50
Удельное объемное сопротивление, при 20 °С, Ом·м, не менее	10 <sup>9</sup>	10 <sup>12</sup>	10 <sup>10</sup>	10 <sup>12</sup>	10 <sup>11</sup>	10 <sup>10</sup>	10 <sup>12</sup>	10 <sup>13</sup>	10 <sup>11</sup>	—

Показатель	К-30	К-31	КТ-102	КТ-115	К-153	К-168	ЭПСК	110	К18	К-43
Относительная диэлектрическая проницаемость при 20 °С, не более	6	5	—	—	—	—	—	—	3	—
Тангенс угла диэлектрических потерь при 20 °С, не более	0,03	0,075	0,03	—	0,05 при 10 <sup>6</sup> Гц	0,1	0,01	0,01	0,02	0,05

## 21.9. Диэлектрические волокнистые непропитанные материалы

К диэлектрическим волокнистым материалам относятся *электротехнические бумаги, картоны, фибры, нити, ленты, ткани*. Различают диэлектрические волокнистые материалы природного происхождения и синтетические. К материалам природного происхождения относятся бумаги и картоны; фибры; хлопчатобумажные, шелковые и стеклянные нити, ленты и ткани из этих материалов. К синтетическим материалам относятся нити, ленты и ткани, полученные из высокополимерных материалов.

### 21.9.1. Электроизоляционные бумаги

Электроизоляционные бумаги могут изготавливаться из целлюлозы, а также из синтетических волокон, например из полиэфирных волокон. По их назначению электроизоляционные бумаги делят на кабельные и конденсаторные, а также бумаги, предназначенные для изготовления электроизоляционных картонов, микалент и др.

*Кабельная бумага для изоляции силовых кабелей на напряжение до 35 кВ.* Бумага изготавливается из небеленой сульфатной целлюлозы. Различают марки бумаг: К — простая, КМ — многослойная; и КМП — многослойная упрочненная. Бумаги марки КМ имеют цвет натурального волокна, бумаги К и КМП — цвет натурального волокна, красный, зеленый и синий. Свойства кабельных бумаг К, КМ и КМП приведены в табл. 21.21.

Таблица 21.21

Основные свойства кабельной бумаги марок К, КМ и КМП

Показатель	К-080	К-120	К-170	КМП-120	КМП-170	КМ-120	КМ-170
Толщина, мкм	80	120	170	120	170	120	170
Плотность, $\text{г/см}^3$	780	780	780	780	780	780	780
Разрушающее усилие, Н, не менее:							
в машинном направлении	83,4	127,5	171,7	152,0	196,2	142,2	186,4
в поперечном направлении	39,2	58,9	83,4	63,8	93,2	63,8	93,2
Удлинение, %, не менее:							
в машинном направлении	2,2	2,2	2,2	2,8	2,8	3,2	3,2
в поперечном направлении	6,6	6,6	6,6	7,0	7,0	9,0	9,0
Воздухопроницаемость, мл/мин, не более	40	40	40	40	40	40	40
Зольность, %, не более	1,0	1,0	1,0	0,8	0,8	0,8	0,8

*Кабельная бумага для изоляции силовых кабелей на напряжение от 110 до 500 кВ.* Бумага изготавливается из 100%-ной небеленой специальной сульфатной целлюлозы. Различают марки бумаг: КВМ — многослойная; и КВМС — многослойная стабилизированная, КВМСУ — многослойная стабилизированная уплотненная. Цифра в марке бумаги означает ее толщину в мкм. Бумаги всех марок имеют цвет натурального волокна. Бумага предназначена для изоляции маслонаполненных кабелей на напряжение от 110 до 500 кВ. Бумагу изготавливают в рулонах шириной 500, 650, 670 и 750 мм.

Свойства кабельных бумаг КВМ, КМС и КВМСУ приведены в табл. 21.22.

*Бумага кабельная полупроводящая.* Бумагу кабельную полупроводящую изготавливают из 100%-ной сульфатной небеленой целлюлозы. Бумага используется для экранирования силовых кабелей.

Марки бумаги: КПУ и КПДУ. Марки КПУ-80, КПУ-120 — кабельные полупроводящие уплотненные одноцветные бумаги с включением в композицию сажи. Применяются для экранирования изоляции силовых кабелей и арматуры для них напря-

Таблица 21.22

Свойства кабельных бумаг КВМ, КМС и КВМСУ

Основные показатели	КВМ-080	КВМ-120	КВМ-170	КВМС-080	КВМС-120	КВМС-170	КВМСУ-080	КВМСУ-120
Толщина, мкм	80	120	170	80	120	170	80	120
Плотность, кг/м <sup>3</sup>	770	770	770	720	720	720	1100	1100
Разрушающее усилие, Н, не менее:								
в машинном направлении	74	142	186	69	108	147	98	137
в поперечном направлении	35	64	83	32	49	69	49	69
Удлинение, %, не менее:								
в машинном направлении	2,2	3,2	3,2	2,6	2,6	2,6	2,2	2,2
в поперечном направлении	8,6	10,4	10,4	8,0	8,6	8,6	8,6	8,6
Зольность, %, не более	0,28	0,28	0,28	0,30	0,30	0,30	0,30	0,30
Влажность, %	4...8	4...8	4...8	4...6	4...6	4...6	4...6	4...6
Тангенс угла диэлектрических потерь при 100 °С, не более	0,0022	0,0022	0,0022	0,0018	0,0019	0,0019	0,0026	0,0026

жением 6 кВ выше. Марки КПДУ-80, КПДУ-120 — кабельные полупроводящие двухцветные уплотненные бумаги с включением сажи в композицию одного слоя. Применяются для экранирования силовых кабелей и арматуры для них напряжением 110 кВ и выше.

Бумага выпускается в рулонах шириной 500 и 750±3 мм и диаметром 450...800 мм.

Технические показатели кабельной полупроводящей бумаги приведены в табл. 21.23.

*Бумага кабельная термостойкая.* Бумага изготавливается из 100%-й хвойной сульфатной небеленой целлюлозы двух марок. Применяется для изоляции силовых кабелей напряжением до 35 кВ включительно. Бумагу выпускают в рулонах шириной 560, 670 и 750 мм. Бумага всех марок имеет машинную гладкость и светло-красный цвет.

Таблица 21.23

Основные свойства кабельной полупроводящей бумаги

Показатель	КПУ-80	КПУ-120	КПДУ-80	КПДУ-120
Толщина, мкм	80	120	80	120
Плотность, кг/м <sup>3</sup>	900...1060	900...1050	970...1070	900...1050
Разрывное усилие, Н, не менее:				
в продольном направлении	78,4	117,6	94	127,4
в поперечном направлении	34,3	63,9	44,1	68,8
Удлинение, %, не менее:				
в продольном направлении	2	2	2	2
в поперечном направлении	6	6	6	6
Воздухопроницаемость, мл/мин, не более	25	26	20	20
Влажность, %	7	7	7	7
Зольность, %, не более	1	1	0,4	1
Удельное объемное сопротивление, Ом·м	10 <sup>3</sup> ...9·10 <sup>4</sup>	10 <sup>3</sup> ...9·10 <sup>4</sup>	—	—
Сопротивление, Ом	—	—	5·10 <sup>4</sup> ...10 <sup>6</sup>	5·10 <sup>4</sup> ...10 <sup>6</sup>

Основные свойства кабельной термостойкой бумаги приведены в табл. 21.24.

Таблица 21.24

Основные свойства кабельной термостойкой бумаги

Показатель	КМТ-125	КМТ-170
Толщина, мм	0,125	0,170
Плотность, кг/м <sup>3</sup>	780	780
Разрывное усилие, Н, не менее:		
в продольном направлении	137,2	186,2
в поперечном направлении	61,7	91,1
Удлинение, %, не менее:		
в продольном направлении	3,2	3,2
в поперечном направлении	10,6	10,8
Потери механической прочности при нагревании, %, не более	27	27
Воздухопроницаемость, мл/мин, не более	30	30
Зольность, %, не более	0,9	0,9
Влажность, %	7	7

**Бумага телефонная.** Бумага телефонная изготавливается из древесной сульфатной целлюлозы. Применяется для изоляции жил телефонных кабелей. Телефонная бумага выпускается одной марки КТ-50 — бумага кабельная телефонная толщиной 50 мкм, в рулонах шириной 500, 700 и 750 мм.

Технические данные кабельной телефонной бумаги КТ-50 приведены в табл. 21.25.

Таблица 21.25

Технические данные кабельной телефонной бумаги КТ-50

Показатель	КТ-50
Толщина бумаги, мм	50
Плотность, кг/м <sup>3</sup>	820
Разрывное усилие, Н, не менее:	
в машинном направлении	60,8
в поперечном направлении	19,6
Зольность, %, не более	1,0
Влажность, %	7,0
Вес 1 м <sup>2</sup> бумаги, г	20

**Бумага конденсаторная.** Конденсаторную бумагу применяют в качестве диэлектрика для изготовления бумажных электрических конденсаторов. Отличается большой плотностью и однородностью и является самой тонкой из всех электроизоляционных бумаг. Виды бумаг: КОН — обычная; СКОН — специальная улучшенного качества; МКОН — бумага с малыми диэлектрическими потерями. Типы бумаг: Н — конденсаторная бумага низкой влажности; В — бумага с увеличенной электрической прочностью; О — бумага односторонней гладкости. В зависимости от плотности конденсаторная бумага выпускается четырех марок: 0,8 — плотностью 0,8 г/см<sup>3</sup>; 1 — плотностью 1,0 г/см<sup>3</sup>; 2 — плотностью 1,2 г/см<sup>3</sup>; 3 — плотностью 1,3 г/см<sup>3</sup>.

Технические данные конденсаторных бумаг приведены в табл. 21.26.

**Бумага для сухих электролитических конденсаторов.** Бумагу для сухих электролитических конденсаторов изготавливают из облагороженной сульфатной целлюлозы с содержанием альфа-целлюлозы не менее 92%. Применяют для прокладок в электролитических конденсаторах. Бумага выпускается марки КЭ. Цифры, входящие в марку соответствуют толщине бумаги в мкм.

Технические данные бумаги для сухих электролитических конденсаторов приведены в табл. 21.27.

Таблица 21.26

Технические данные конденсаторной бумаги

Вид и марка	Плотность, г/см <sup>3</sup>	Толщина d, мкм	$\Delta d$ , мкм	Тангенс угла диэлектрических потерь	Среднее пробивное напряжение слоя, В, не менее	Количество токопроводящих включений на 1 м <sup>2</sup> , не более
КОН 1	0,97...1,03	10	±0,7	при 100 °С 0,26	360	120
		11	±0,7		380	100
		12	±1,0		400	80
		13	±1,0		420	70
		14	±1,0		430	60
		15	±1,0		450	50
		22	±1,5		530	15
		30	±2,0		620	7
КОН 2	1,15...1,24	4	±0,5	при 100 °С 0,32	240	1800
	1,15...1,24	5	±0,6		270	1000
	1,15...1,24	6	±0,5		280	800
	1,17...1,25	7	±0,5		320	500
	1,17...1,25	8	±0,5		330	350
	1,17...1,25	9	±0,5		360	280
	1,18...1,26	10	±0,6		380	200
	1,18...1,26	11	±0,7		410	160
	1,18...1,26	12	±0,7		440	120
	1,18...1,26	13	±0,8		450	100
	1,18...1,26	14	±0,8		460	80
	1,19...1,26	16	±0,8		470	79
	1,19...1,26	16	±1,8		480	70
	1,19...1,26	18	±1,0		510	60
	1,19...1,26	20	±1,5		540	60
	1,19...1,26	22	±1,5		580	30
	1,23...1,30	30	±2,0		680	15
СКОН 1	0,97...1,03	10	±0,7	при 100 °С 0,20	380	60
		11	±0,7		400	50
		12	±1,0		420	30
		13	±1,0		430	20
		14	±1,0		440	18
		15	±1,0		460	15
		22	±1,5		510	5
		30	±2,0		620	3

Продолжение табл. 21.26

Вид и марка	Плотность, г/см <sup>3</sup>	Тол- щина $d$ , мм	$\Delta d$ , мм	Тангенс угла диэлектриче- ских потерь	Среднее про- бивное на- пряжение слоя, В, не менее	Количество то- копроводящих включений на 1 м <sup>2</sup> , не более
СКОН 2	1,10...1,24	4	$\pm 0,5$	при 100 °С 0,24	270	1000
	1,15...1,24	5	$\pm 0,5$		290	400
	1,15...1,24	6	$\pm 0,5$		300	300
	1,17...1,25	7	$\pm 0,5$		330	260
	1,17...1,25	8	$\pm 0,5$		360	180
	1,17...1,25	9	$\pm 0,6$		380	130
	1,18...1,26	10	$\pm 0,6$		400	100
	1,18...1,26	11	$\pm 0,7$		430	80
	1,18...1,26	12	$\pm 0,7$		460	60
	1,18...1,26	13	$\pm 0,8$		470	50
	1,18...1,26	14	$\pm 0,8$		480	40
	1,19...1,26	15	$\pm 0,8$		490	30
	1,19...1,26	22	$\pm 1,5$		590	10
СКОН 3	1,26...1,34	6	$\pm 0,5$	при 100 °С 0,32	300	750
		6	$\pm 0,5$		310	400
		7	$\pm 0,5$		340	300
		8	$\pm 0,5$		370	200
		9	$\pm 0,5$		390	160
		10	$\pm 0,6$		410	120
		11	$\pm 0,6$		440	100
		12	$\pm 0,7$		480	80
		13	$\pm 0,8$		490	70
		14	$\pm 0,8$		500	60
		15	$\pm 0,8$		510	60
		22	$\pm 1,0$		610	20
МКОН 08	0,75...0,85	10	$\pm 1,0$	при 120 °С 0,16 для ти- па Н 0,12 для ти- па В	320	40
	0,75...0,85	11	$\pm 1,0$		350	30
	0,75...0,85	12	$\pm 1,0$		390	20
	0,75...0,85	13	$\pm 1,0$		400	16
	0,75...0,85	14	$\pm 1,0$		410	12
	0,75...0,85	15	$\pm 1,0$		420	10
	0,75...0,85	18	$\pm 1,6$		450	6
	0,75...0,85	20	$\pm 1,5$		470	4

Вид и марка	Плотность, г/см <sup>3</sup>	Толщина $d$ , мкм	$\Delta d$ , мкм	Тангенс угла диэлектрических потерь	Среднее пробивное напряжение слоя, В, не менее	Количество токопроводящих включений на 1 м <sup>2</sup> , не более
МКОН 1	0,97...1,03	6	±0,6	при 120 °С 0,20 для типа Н 0,16 для типа В	340	100
	0,97...1,13	9	±0,7		360	80
	0,97...1,03	10	±0,7		380	60
	0,97...1,03	11	±0,7		400	50
	0,97...1,03	12	±1,0		420	30
	0,97...1,03	13	±1,0		430	20
	0,97...1,03	14	±1,0		440	18
	0,97...1,03	15	±1,0		460	15
	0,97...1,03	17	±1,5		470	15
	0,97...1,03	18	±1,6		490	10
	0,97...1,03	20	±1,6		510	6
	0,97...1,03	30	±2,0		620	3
МКОН 2	1,15...1,24	6	±0,5	при 120 °С 0,28 для типа Н 0,22 для типа В	300	300
	1,17...1,25	7	±0,5		330	250
	1,17...1,25	8	±0,5		360	170
	1,17...1,25	9	±0,6		380	130
	1,18...1,26	10	±0,6		400	100
	1,18...1,26	11	±0,7		430	80
	1,18...1,26	12	±0,7		460	60
	1,18...1,26	13	±0,8		470	50
	1,18...1,26	14	±0,8		480	40
	1,19...1,26	15	±0,8		490	30
	1,19...1,26	18	±1,0		620	20
	1,19...1,26	20	±1,5		560	12
	1,23...1,30	30	±2,0		680	5
МКОН 3	1,26...1,34	6	±0,5	при 120 °С 0,32 для типа Н 0,26 для типа В	310	400
	1,26...1,34	7	±0,5		340	300
	1,26...1,34	8	±0,6		380	200
	1,26...1,34	9	±0,5		400	160
	1,26...1,34	10	±0,6		420	120
	1,26...1,34	11	±0,6		450	100
	1,26...1,34	12	±0,7		490	80
	1,26...1,34	13	±0,8		500	70
	1,26...1,34	14	±0,8		510	60
	1,26...1,34	15	±0,8		520	50

Таблица 21.27

Характеристики бумаги для сухих электролитических конденсаторов

Показатель	КЭ-10	КЭ-13	КЭ-27	КЭ-35	КЭ-55	КЭ-75	КЭ-95
Толщина, мкм	10	13	27	35	55	75	95
Плотность, г/см <sup>3</sup> , не более	0,85	0,85	0,65	0,60	0,55	0,50	0,50
Разрушающее усилие в машинном направлении, Н,	9,8	9,8	9,8	9,8	11,8	14,7	19,6
Коэффициент проницаемости $\psi$ , не более	45	42	30	20	17	15	12
Зольность (для всех марок), %	0,25						
pH водной вытяжки бумаги (для всех марок)	6,0...7,5						
Влажность (для всех марок), %, не более	8						

*Бумага электроизоляционная намоточная.* Бумагу изготовляют из небеленой сульфатной целлюлозы. Бумага используется после покрытия ее склеивающими веществами для производства намоточных электротехнических изделий. Различают три марки бумаги: ЭН-50, ЭН-70 и ЭН-100, цифры соответствуют средней толщине бумаги в мкм. Выпускается бумага в рулонах шириной 1000, 1500 и 2500 мм.

Свойства бумаги приведены в табл. 21.28.

Таблица 21.28

Основные свойства намоточной бумаги

Показатель	ЭН-50	ЭН-70	ЭН-100
Толщина бумаги, мкм	50	70	100
Разрушающее усилие, Н, не менее:			
в машинном направлении	44,2	68,7	88,3
в поперечном направлении	19,6	32,4	39,2
Сопротивление излому (число двойных перегибов) в машинном направлении после термообработки, не менее	550	650	600
Плотность, г/см <sup>3</sup> , не менее	0,78	0,78	0,75
Зольность, %, не более	1,0	1,0	1,0
Электрическая прочность, МВ/м, не менее	9,0	9,0	7,5
Капиллярная впитываемость воды в течение 10 мин, мм	4...10	4...10	6...14

## 21.9.2. Электроизоляционные картоны

*Электроизоляционный картон.* Изготавливают из сульфатной небеленой целлюлозы с добавлением тряпичного волокна.

Имеются следующие марки картонов: ЭВТ — для изоляции деталей электрических машин и аппаратов; ЭВ — для общих целей электроизоляции, а также изоляции в электрических машинах, электрооборудовании и электроаппаратах; ЭВС — для пазовой изоляции автомобильных стартеров и других деталей автотракторного оборудования; ЭВП — для производства пленкоэлектрокартона; ЭВА для производства деталей автотракторного оборудования. Картон марки ЭВС выпускается темно-серого цвета, картон других марок — цвета натурального волокна

Толщина картона: 0,10; 0,15; 0,20; 0,25; 0,30; 0,35; 0,40; 0,50; 1,0; 1,25; 1,50; 1,75; 2,0; 2,5; 3,0 мм. Предельные отклонение толщины: от +0,02 при толщине 0,10 до 0,25 при толщине 3 мм.

Технические данные электроизоляционного картона приведены в табл. 21.29.

Таблица 21.29  
Технические данные электроизоляционного картона

Показатель	ЭВС	ЭВП	ЭВТ	ЭВ	ЭВА
<b>Предел прочности при растяжении, МПа:</b>					
<b>в исходном состоянии, не менее:</b>					
<b>в машинном направлении</b>	127	127	118	98	118
<b>в поперечном направлении</b>	34	34	31	25	34
<b>после перегиба:</b>					
<b>в машинном направлении</b>	98	98	78	78	78
<b>в поперечном направлении</b>	29	25	25	25	29
<b>Электрическая прочность, МВ/м, не менее:</b>					
<b>картон толщиной, мм:</b>					
0,10...0,15	—	12	13	12	—
0,20...0,25	12	12	13	11	—
0,3	—	—	—	—	11
0,3...0,40	12	—	12	11	—
0,5	—	—	12	10	—
1,0...2,9	—	—	—	—	—
2,9...3,0	—	—	—	—	—

Показатель	ЭВС	ЭВП	ЭВТ	ЭВ	ЭВА
по линиям перегиба в среднем по двум направлениям картона толщиной, мм:					
0,10...0,25	—	9	10	—	—
0,3...0,4	—	—	9	—	8
0,2...0,4	10	—	—	—	—
0,1...0,5	—	—	—	8	—
Плотность, кг/м <sup>3</sup> , картона толщиной, мм:					
0,1	—	1250	1150	1150	—
0,16...0,20	1,25	—	1150	1150	1,2
0,25...0,30	1,25	1250	1150	1150	—
0,35	1,25	—	1150	1150	—
0,40	1,20	—	—	1150	—
0,5	—	—	1150	1150	—
1,0...2,0	—	—	1150	1150	—
2,5...3,0	—	—	—	1150	—
Состав тряпичного волокна, %, не менее	15	20	30	Не нормируется	Не нормируется
Состав целлюлозы сульфатной небеленой, %, не более	85	80	70	То же	100

*Электроизоляционные картоны для трансформаторов и аппаратов.* Электроизоляционные картоны изготовляют из небеленой сульфатной и хлопковой целлюлозы. Предназначены для работы в трансформаторном масле при температуре до 105 °С. Марки и области применения картонов приведены в табл. 21.30.

Влажность электроизоляционных картонов не должна превышать 8%, зольность — 1,2%.

Электроизоляционные картоны для трансформаторов и аппаратов марок АМ, А, Б, В выпускаются в виде листов размерами 3000×4000, 2000×3000, 1020×1500, 1020×1000 мм.

Размеры листов картона марки Г 850×1100 мм. Ширина рулона марки Г — 1000 мм.

Технические данные электроизоляционных картонов для трансформаторов и аппаратов приведены в табл. 21.31.

Таблица 21.30

## Марки и области применения картонов

Марка и основные технические свойства (толщина, мм)	Области применения
АМ. Эластичный, гибкий с высокой стойкостью к действию поверхностных разрядов, (2,0...3,0)	Для изготовления деталей главной изоляции высоковольтных трансформаторов напряжением от 750 кВ и выше
А. Эластичный, гибкий с повышенной стойкостью к действию поверхностных разрядов, (2,0...3,0)	Для изготовления деталей главной изоляции трансформаторов напряжением до 750 кВ включительно
Б. Картон средней плотности с повышенными электрическими характеристиками, (1,0...6,0)	Для изготовления деталей главной изоляции трансформаторов напряжением до 220 кВ включительно и ярмовой изоляции трансформаторов всех классов напряжений, а также для изоляции в других аппаратах с масляным заполнением
В. Картон повышенной плотности с малой сжимаемостью под давлением и высокой электрической прочностью, (2,0...3,0)	Для изготовления деталей продольной и главной изоляции трансформаторов и аппаратов
Г. Картон средней плотности с повышенным сопротивлением расслаиванию, (0,5...3,0), (0,5 — рулонный)	Для получения склеенного картона и для изготовления изоляционных деталей, применяемых в трансформаторах и других аппаратах с масляным заполнением

Таблица 21.31

Технические данные электроизоляционных картонов  
для трансформаторов и аппаратов

Показатель	АМ	А	Б	В	Г	
					Листовой	Рулонный
Состав по волокну, %:						
целлюлозы сульфатной	Свыше 70	100	100	100	100	100
целлюлозы хлопковой небеленой	До 30	—	—	—	—	—
Плотность, кг/м <sup>3</sup> , не менее, для картона толщиной, мм:						
0,5	—	—	—	—	900	900
1,0	—	—	950	—	900	—
1,5	880...1000	900...1000	950	1250	900	—
от 2 до 3	—	—	1000	—	1000	—
от 4 до 6	—	—	1000	—	—	—

Показатель	AM	A	Б	В	Г	
					Листовой	Рулонный
Предел прочности при растяжении в поперечном направлении, МПа, не менее	39	39	49	59	39	34
Впитываемость масла, %, не менее	30	25	14	6	—	—
Зольность, %, не более	0,7	0,7	0,7	0,7	1	1
Влажность, °А, не более, для картона толщиной:						
от 0,5 до 1,5	—	—	10	—	10	10
свыше 1,5	8,5	8,5	8,5	8,5	9	—
Стойкость к воздействию испытательного напряжения перпендикулярно к поверхности, кВ, не менее, для картона толщиной, мм:						
0,5	—	—	—	—	—	19
1,0	—	—	31	—	28	—
1,5	—	—	43	—	37	—
2,0	—	—	53	—	46	—
2,5	40	40	61	55	63	—
3,0	45	45	66	65	57	—
4,0	50	50	76	70	—	—
5,0	—	—	84	—	—	—
6,0	—	—	90	—	—	—

### 21.9.3. Фибра листовая

Листовую фибру изготавливают из непроклеенной бумаги, обработанной водным раствором хлористого цинка. Фибра обладает сравнительно высокой плотностью, механической прочностью, хорошими технологическими свойствами. После размачивания в горячей воде фибра может формоваться. Повышенная гигроскопичность фибры может быть уменьшена пропиткой трансформаторным маслом, парафином и т. п.

Листовая фибра, применяемая в электромашиностроении, выпускается двух марок: ФЭ — фибра электротехническая для изготовления электроизолирующих деталей; ФТ — фибра техническая для изготовления конструкционных деталей в электромашиностроении. Фибра марки ФЭ — цвета естественного волокна, марка ФТ — цвета естественного волокна, красного, черного, темно-серого, коричневого цветов.

Листы фибры хорошо подвергаются механической обработке: распиливанию, сверлению и штампованию без расслоения, растрескивания и выкрашивания. Механическую обработку фибры производят при влажности 6...10%.

Толщина листов фибры и предельные отклонения приведена в табл. 21.32.

Таблица 21.32

Толщина и предельные отклонения листов фибры

Марка	Толщина листа, мм	Предельные отклонения, мм
ФЭ	0,4	$\pm 0,05$
	0,5	$\pm 0,03$
ФЭ и ФТ	0,6; 0,7; 0,8	$\pm 0,10$
	0,9; 1,0; 1,1	$\pm 0,15$
	1,2; 1,3; 1,4	$\pm 0,20$
	1,5; 1,7; 2	$\pm 0,25$
	2,2; 2,5; 3	$\pm 0,25$
ФТ	3,5; 4; 4,5; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12	$\pm 0,50$
	13; 14	$\pm 0,75$
	16; 16; 17	$\pm 1,0$
	18; 19	$\pm 1,26$
	20; 22; 25	$\pm 1,5$

Фибру толщиной от 0,4 до 8 мм изготавливают монолитной, толщиной от 8 до 12 мм — монолитной или клееной, толщиной свыше 12 мм — клееной. Размеры листов монолитной фибры: длина 850...1500 мм, ширина 550...700 мм; длина 1700...2300 мм, ширина 1100...1490 мм.

Размеры листов клееной фибры: длина 1600...1900 мм, ширина 400...700 мм.

Технические данные листовой фибры приведены в табл. 21.33.

Таблица 21.33

Технические данные листовой фибры

Основные показатели	ФЗ	ФТ
<b>Плотность, кг/м<sup>3</sup> фибры толщиной, мм, не менее:</b>		
0,4...0,9	1100	1100
1,0...3	1200	1150
3,5...5	—	1200
6,0...25	—	1100
<b>Предел прочности при растяжении, МПа</b>		
<b>в машинном направлении фибры толщиной, мм, не менее:</b>		
0,4...0,9	69	29
1,0...3	74	69
3,5...8	—	59
6,0...25	—	48
<b>в поперечном направлении фибры толщиной, мм, не менее:</b>		
0,4...0,9	44	42
2,2...3	44	44
3,5...5	—	34
6,0...25	—	29
<b>Электрическая прочность, МВ/мм, фибры толщиной, мм, не менее:</b>		
0,4...1,0	7,0	4,0
1,1...2	5,0	2,5
2,2...12	3,5	2,0
<b>Зольность, %, не более</b>	1,5	2,0
<b>Влажность, %</b>	6,0...10	6,0...10
<b>Водопоглощение за 24 ч, %, не более, фибры толщиной, мм:</b>		
0,4...0,9	65	65
1,0...3,0	60	80
3,6...5,0	—	50
6,0...12	—	40
13...25	—	35

## 21.9.4. Электроизоляционные ткани

Выпускаются по составу ткани хлопчатобумажные технические для электротехнической промышленности и стеклоткани.

Ткани хлопчатобумажные технические для электротехнической промышленности делятся на две группы: первая — это ткани для изготовления лакотканей. К ней относятся: перкали В и Б-Э, ткань ЭИ-1. Вторая группа — ткани, предназначенные для изготовления слоистых пластиков (бязи Т1 и Т2, парусина ЭТ) и резаных изоляционных лент (ткани ЭИ-3 и ЭИ-4 саржевого переплета). Технические данные технических хлопчатобумажных тканей приведены в табл. 21.34.

Таблица 21.34

Технические данные хлопчатобумажных тканей  
для электротехнической промышленности

Наименование тканей и вид отделки	Масса 1 м <sup>2</sup> , г	Число нитей на 10 см		Разрывная нагрузка полоски ткани 50×200 мм, Н, не менее		Толщина ткани, мм	Ширина ткани, см
		основы	утка	основы	утка		
Бязь суровая Т1	154±8	215±3	193±6	373	343	0,50	100±2
Бязь суровая Т2	146±7	264±4	238±7	373	392	0,43	90±1,5
Перкаль В отваренный	137±7	477±9	400±12	638	490	0,16	85±1,5
Перкаль Б-Э расшлихтованный аппретированный	64±3	433±8	480±14	245	206	0,10	90±1,5
Парусина ЭТ расшлихтованная	263±13	204±4	160±5	687	598	0,65	100±2 95±1,5
Ткань ЭИ-1 отваренная аппретированная	100±5	320±6	320±10	334	304	0,13	90±1,5
Ткань ЭИ-2 отваренная неаппретированная	95±5	320±6	320±10	334	304	0,22	90±1,0
Ткань ЭИ-3 отваренная	112±6	354±7	180±5	530	137	0,34	80±1,8
Ткань ЭИ-4 отваренная	173±8	269±5	180±5	736	245	0,54	80±1,5

**Стеклоткани.** Стеклоткани изготавливаются из крученых комплексных нитей. Элементарные нити имеют диаметр от 3 до

10 мкм, получают их из алюмоборосиликатного стекла. Стеклоткани выпускают 4-х классов. Используют: 1-й класс для изготовления слоистых фольгированных пластиков; 2-й для стеклолакотканей; 3-й для стеклопластиков; 4-й для слюдинитов, слюдопластов и миканитов. Стеклоткани негорючи и невоспламеняемы.

В обозначении марок стеклотканей буквы и цифры означают: Э — ткань электроизоляционная; (с) — сетка-ткань разреженной структуры; 1, 2, 3, 4 — класс; двух- и трехзначные цифры — номинальную толщину ткани в микрометрах; третья часть — индекс замасливателя или аппрета. Отсутствие индекса замасливателя означает применение в этом качестве парафиновой эмульсии. Ткани выпускаются шириной 70, 80, 90, 95, 100 и 110 см. Длина ткани в рулоне не менее: 200 м в тканях толщиной до 62 мкм, 150 м в тканях толщиной от 80 до 100 мкм, 100 м в тканях толщиной от 125 до 200 мкм и 50 м в тканях толщиной свыше 200 мкм.

Технические данные стеклотканей приведены в табл. 21.35.

Таблица 21.35

Технические данные стеклотканей

Марка ткани	Толщина, мм	Масса 1 м <sup>2</sup> , г	Плотность ткани, нитей/см		Разрывная нагрузка полоски ткани 25х100 мм, Н, не менее	
			по основе	по утку	по основе	по утку
Э1-26	0,025±0,002	24±2	30+1	30±1	150	120
Э1-30	0,030±0,002	27±3	24+1	21±1	150	120
Э1-43	0,043±0,003	45±4	24+1	22±1	300	260
Э1-62	0,062±0,005	68±4	20+1	20±1	400	300
Э1-62В	0,062±0,006	68±4	20+1	20±1	350	300
Э1-100	0,100±0,008	108±6	20+1	20±1	600	600
Э1-100В	0,100±0,010	108±6	20+1	20±1	300	300
Э1-125	0,125±0,010	145±9	16+1	16±1	900	900
Э1-150-78	0,150±0,012	150±9	11+1	11±1	1000	1000
Э1-150-В	0,150±0,016	150±9	11+1	11±1	400	400
Э1-125-ПТ	0,125±0,010	145±9	16+1	16±1	900	900
Э1-150-ПТ	0,150±0,012	150±9	11+1	11±1	900	900
Э2-30	0,030±0,003	27±3	24+1	21±1	150	120
Э2-43	0,043±0,03	45±5	24+1	22±1	400	260
Э2-62	0,062±0,005	68±5	20+1	20±1	400	300
Э2-62В	0,062±0,006	68±5	20+1	20±1	350	300

Марка ткани	Толщина, мм	Масса 1 м <sup>2</sup> , г	Плотность ткани, нитей/см		Разрывная нагрузка полоски ткани 25×100 мм, Н, не менее	
			по основе	по утку	по основе	по утку
Э2-80	0,080±0,006	95±10	20+1	20±1	600	500
Э2-80В	0,080±0,008	95±10	20+1	20±1	450	350
Э2-100	0,100±0,008	108±10	20+1	20+1	600	600
Э2-100В	0,100±0,010	108±10	20+1	20±1	450	360
Э2-126	0,126±0,01	145±9	16+1	16±1	900	900
Э3-100	0,100±0,10	108±10	20+1	20±1	600	600
Э3-100В	0,100±0,012	108±10	20+1	20±1	450	360
Э3-100-78	0,100±0,010	108±10	20+1	20±1	600	600
Э3-100-ПТ	0,100±0,010	108±10	20+1	20±1	600	600
Э3-125	0,125±0,013	145±12	16+1	16±1	900	900
Э3-125-ПТ	0,125±0,013	145±12	16+1	16±1	900	800
Э3-150-ПТ	0,150±0,015	150±12	11+1	11±1	1000	1000
Э3-150-78	0,150±0,015	150±12	11+1	11±1	1000	1000
Э3-200	0,200±0,020	195±16	10+1	9±1	1150	1100
Э3-200-ПТ	0,200±0,020	195±16	10+1	9±1	1150	1100
Э3-200-78	0,200±0,020	195±16	10+1	9±1	1150	1100
Э3-260-ПТ	0,250±0,025	230±18	8+1	7±1	1200	1100
Э3-250-78	0,260±0,025	230±18	8+1	7±1	1200	1100
Э3-400-78	0,400±0,040	400±32	6+1	6,5±1	2200	2200
Э3-400-ПТ	0,400±0,040	400±32	6+1	6,5±1	2100	2100
Э4-25	0,025±0,003	24±3	30+1	30±1	150	120
Э4-30	0,030±0,003	27 ±3	24+1	21±1	150	120
Э4-43	0,043±0,004	45±6	24+1	22+1	300	260
Э4-62	0,062±0,006	68±7	20+1	20±1	400	300
Э(с)4-25	0,025±0,003	18+3	30+1	15±1	120	50
Э(с)4-40	0,040±0,004	35±4	20+1	10±1	180	70
Э(с)4-62	0,062±0,006	56±6	20+1	10±1	300	126

## 21.9.5. Ткани асбестовые (ГОСТ 6102-78)

Асбестовые ткани изготовляют полотняным, репсовым или саржевым переплетением основных и уточных асбестовых нитей. Используются асбестовые ткани в производстве слоистых пластиков.

В электротехнической промышленности применяют ткани марок: АТ-1С, АТ-1М, АТ-2, АТ-3, и АЛТ-6. Ткани марок АТ-1С, АТ-1М, АТ-2 и АТ-3 содержат от 15,5 до 18,5% хлопка, а марка АЛТ-6 — 30% лавсана.

Поставляют ткани в рулонах каждую марку двух сортов. Длина рулона ткани не менее 25 м при массе 1 м<sup>2</sup> до 1600 г и 12 м при массе 1 м<sup>2</sup> более 1600 г.

Основные технические данные приведены в табл. 21.36.

Таблица 21.36

Основные технические данные асбестовых тканей

Показатель	АТ-1С	АТ-1М	АТ-2	АТ-3	АЛТ-6
Толщина, мм	1,6	1,6	1,7	2,5	1,0
Ширина, мм (±20%)	1040; 1350; 1550; 1700	1040; 1350; 1550; 1700	1040; 1350; 1550	1040; 1350; 1560	1040; 1350
Масса 1 м <sup>2</sup> , г	1000	1000	1050	1300	400
Число нитей на 100 мм:					
по основе	80	80	60	46	132
по утку	42	42	30	33	83
Разрывная на- грузка полоски 50×100 мм, Н, не менее:					
по основе	637	686	490	490	490
по утку	265	294	167	196	245

### 21.9.6. Электроизоляционные ленты

*Ленты для электротехнической промышленности.* Ленты — тканые полоски, изготавливаемые из хлопчатобумажной пряжи и полиэфирных нитей с разным переплетением. Соответственно различают: киперные, тафтяные, батистовые и миткалевые ленты. В зависимости от качества по внешнему виду для ленты установлены два сорта: первый и второй. Определение сортности ленты производится по техническим условиям.

Ленту наматывают в рулоны длиной 50...110 м. Ленты шириной 20 мм включительно поставляют по 20 рулонов в пачке, а ленты шириной более 20 мм упаковывают по 10 рулонов в пачку. Каждую пачку перевязывают крестообразно.

Основные технические данные киперной, миткалевой, батистовой и тафтяной лент приведены в табл. 21.37—21.40.

Таблица 21.37

## Основные технические данные киперной ленты

Условное обозначение	Ширина, мм	Толщина, мм	Разрывная нагрузка по основе, Н, не менее	Масса 100 м, кг
К-8-1	8	0,45	127,52	0,155
К-10-2	10	0,45	137,34	0,187
К-12-3	12	0,45	166,77	0,232
К-12-4	12	0,45	166,77	0,232
К-15-5	15	0,46	206,01	0,276
К-15-6	15	0,45	206,01	0,281
К-20-7	20	0,45	256,06	0,361
К-20-8	20	0,47	255,06	0,351
К-25-9	25	0,45	313,92	0,462
К-25-10	25	0,47	313,92	0,460
К-30-11	30	0,45	362,97	0,543
К-30-12	30	0,47	362,97	0,530
К-35-13	35	0,45	421,83	0,637
К-35-14	35	0,47	421,83	0,619
К-40-15	40	0,45	470,88	0,723
К-40-16	40	0,47	470,88	0,741
К-50-17	50	0,45	568,98	0,902

Таблица 21.38

## Основные технические данные миткалевой ленты

Условное обозначение	Ширина, мм	Толщина, мм	Разрывная нагрузка по основе, Н, не менее	Масса 100 м, кг
М-12-44	12	0,22	117,72	0,126
М-16-45	16	0,14	323,73	0,149
М-16-46	16	0,22	156,96	0,168
М-20-47	20	0,14	392,4	0,184
М-20-48	20	0,22	186,39	0,209
М-25-49	25	0,14	490,5	0,228
М-25-50	25	0,22	225,63	0,253
М-30-61	30	0,14	588,6	0,273
М-30-62	30	0,22	264,87	0,297
М-35-53	35	0,22	304,11	0,340
М-40-54	40	0,12	343,35	0,387

Таблица 21.39

Основные технические данные батистовой ленты

Условное обозначение	Ширина, мм	Толщина, мм	Разрывная нагрузка по основе, Н, не менее	Масса 100 м, кг
Б-10-56	10	0,18	58,86	0,084
Б-12-68	12	0,18	78,48	0,093
Б-13-57	13	0,23	127,53	0,130
Б-16-58	16	0,15	294,3	0,138
Б-16-69	16	0,18	107,91	0,128
Б-20-60	20	0,15	343,35	0,179
Б-20-61	20	0,18	127,53	0,180
Б-26-62	26	0,15	392,4	0,223

Таблица 21.40

Основные технические данные тафтяной ленты

Условное обозначение	Ширина, мм	Толщина, мм	Разрывная нагрузка по основе, Н, не менее	Масса 100 м, кг
T-10-18	10	0,25	88,29	0,100
T-12-19	12	0,25	107,91	0,120
T-15-20	15	0,16	323,73	0,154
T-15-21	15	0,25	127,53	0,152
T-15-22	15	0,25	127,63	0,153
T-20-23	20	0,25	147,15	0,195
T-20-24	20	0,16	392,4	0,195
T-20-25	20	0,25	156,96	0,199
T-20-26	20	0,25	156,96	0,199
T-25-27	26	0,25	178,68	0,244
T-25-28	25	0,25	196,2	0,244
T-25-29	25	0,16	490,5	0,239
T-25-30	25	0,25	196,2	0,245
T-30-31	30	0,16	688,6	0,287
T-30-32	30	0,25	206,01	0,291
T-30-33	30	0,25	235,44	0,291
T-30-34	30	0,25	235,44	0,291
T-35-35	35	0,25	274,68	0,339
T-35-36	36	0,25	225,63	0,338
T-40-37	40	0,25	304,11	0,392
T-40-38	40	0,25	255,06	0,384
T-50-39	60	0,25	313,92	0,480
Тр-15-40	15	0,40	127,53	0,143
Тр-20-41	20	0,40	156,96	0,186
Тр-25-42	25	0,40	176,58	0,233
Тр-30-43	30	0,40	206,01	0,300

*Лента электроизоляционная стеклянная марки ЛЭС.* Ленту марки ЛЭС вырабатывают из крученых стеклянных комплексных нитей из алюмоборосиликатного стекла с содержанием окислов щелочных металлов не более 0,5% и с применением замасливателя (парафиновая эмульсия).

В обозначение ленты входят буквы: ЛЭС — лента электроизоляционная стеклянная, цифры: первая определяет толщину ленты, вторая — ширину в мм. Например: ЛЭС-0,2х15 означает стеклянную ленту толщиной 0,2 мм, шириной 15 мм. Толщины лент: 0,1; 0,15 и 0,2 мм. Лента марки ЛЭС отличается от хлопчатобумажной ленты большей прочностью на разрыв, но меньшей прочностью на истирание. Ленту применяют для изоляции обмоток электрических машин и аппаратов. Ленту поставляют в рулонах: длина ленты в рулоне не менее 40 м. Кромки ленты должны быть прямыми, ровными и не иметь загрязнений и повреждений.

Технические данные ленты ЛЭС приведены в табл. 21.41.

Таблица 21.41  
Технические данные ленты ЛЭС

Марка	Ширина, мм	Толщина, мм	Разрушаю- щая нагруз- ка по осно- ве, Н	Число нитей основы по всей ленте, шт	Плотность по утку, нитей/см	Масса 100 м ленты, г
ЛЭС-0,1Х10	10	0,100	245	28±2	15±1	110
ЛЭС-0,1Х15	15		343	40±2	15±1	170
ЛЭС-0,1Х20	20		441	52±2	15±1	230
ЛЭС-0,1Х25	25		539	64±2	15±1	290
ЛЭС-0,1х30	30		637	76±2	15±1	350
ЛЭС-0,1Х35	35		735	91±2	15±1	410
ЛЭС-0,1Х40	40		833	103±2	15±1	470
ЛЭС-0,1Х45	45		931	115±2	15±1	530
ЛЭС-0,1Х50	50		1029	124±2	15±1	590
ЛЭС-0,15Х10	10	0,150	294	24±2	13±1	165
ЛЭС-0,15Х15	15		441	36±2	13±1	260
ЛЭС-0,15Х20	20		588	48±2	13±1	330
ЛЭС-0,15Х25	25		686	60±2	13±1	415
ЛЭС-0,15Х30	30		784	72±2	13±1	500
ЛЭС-0,15Х35	35		882	84±2	13±1	585
ЛЭС-0,15Х40	40		980	96±2	13±1	670
ЛЭС-0,15Х45	45		1078	106±2	13±1	740
ЛЭС-0,15Х50	50		1176	116±2	13±1	810

Марка	Ширина, мм	Толщина, мм	Разрушаю- щая нагруз- ка по осно- ве, Н	Число нитей основы по всей ленте, шт	Плотность по утку, нитей/см	Масса 100 м ленты, г
ЛЭС-0,2Х10	10	0,200	490	20+2	12±1	240
ЛЭС-0,2Х15	15		686	30+2	12+2	340
ЛЭС-0,2Х20	20		882	40 ±2	12+1	450
ЛЭС-0,2Х25	25		980	50+2	12±1	560
ЛЭС-0,2Х30	30		1078	60+2	12±1	670
ЛЭС-0,2Х35	35		1176	70+2	12±1	780
ЛЭС-0,2Х40	40		1274	80±2	12±1	890
ЛЭС-0,2Х45	45		1372	88+2	12+1	1000
ЛЭС-0,2Х50	50		1470	96±2	12±1	1100

*Лента стеклянная бандажная.* Лента состоит из параллельно расположенных комплексных стеклянных нитей, скрепленных друг с другом связующим веществом. Лента выпускается марки ЛСБ-Ф: лента стеклянная бандажная, класса нагревостойкости F. Применяется для бандажирования якорей и роторов электрических машин с изоляцией класса нагревостойкости F. Лента выпускается толщиной 0,2 мм, шириной 15, 20 и 20 мм. Предел прочности при растяжении не менее 6,7 МПа.

*Лента стеклянная полупроводящая марок ЛСП.* Лента полупроводящая изготавливается из медьсеребросодержащего стекла. Марки ленты: ЛСП-0-1, ЛСП-0-2 и ЛСП-0-3, толщина 0,2 мм, ширина 25 мм. Применяется для противокоронной защиты высоковольтных электрических машин.

*Ленты асбестовые электро- и теплоизоляционные.* Ленты асбестовые изготовлены из асбестовой пряжи. Марки, наименование и назначение асбестовых лент приведены в табл. 21.42, а их технические данные — в табл. 21.43.

Таблица 21.42

Марки, наименование и назначение асбестовых лент

Марка и наимено- вание ленты	Назначение
Лента асбестовая электроизоляци- онная ЛАЗ-1	Электроизоляция проводов, кабелей, элементов электрических машин и в качестве полупроводящих покрытий высоковольтных обмоток электрических машин, работающих при температуре до 400 °С. Защита катушек электрических машин от механических и тепловых повреждений и в качестве полупроводящих покрытий высоковольтных обмоток, работающих при температуре до 400 °С

Марка и наименование ленты	Назначение
Лента асбостеклянная электроизоляционная ЛАСЭ-1	Электроизоляция проводов, кабелей и элементов электрических машин, работающих при температуре до 400 °С
ЛАСЭ-2	Защита катушек электрических машин от механических и тепловых повреждений, в качестве полупроводящих покрытий высоковольтных обмоток, работающих при температуре до 400 °С
ЛАЛЭ-1, ЛАЛЭ-2 Лента асболова-новая электроизоляционная	Полупроводящее покрытие высоковольтных обмоток турбо- и гидрогенераторов и крупных машин переменного тока высокого напряжения, работающих при температуре до 400 °С
ЛАТ. Лента асбестовая теплоизоляционная	Теплоизоляция трубопроводов, кабелей и других элементов, приборов и машин, работающих при температуре до 400 °С

Таблица 21.43

Технические данные асбестовых лент

Марка	Толщина, мм	Ширина, мм	Разрывная нагрузка на ширину ленты, Н, не менее	Потери массы при прокаливании, %	Масса одного метра длины, г
ЛАСЭ-1	0,40	20	80	34	12
		25	100		14
	0,50	20	80		12
		25	130		14
		30	140		16
ЛАСЭ-2	0.40	20	80	34	12
		25	100		14
	0,50	20	80		12
		26	130		14
		30	140		16
ЛАСЭ-1	0.60	20	110	30	9
		25	120		10
		30	130		13
ЛАСЭ-2	0,50	20	110	30	9
		25	120		10
		30	130		13
ЛАЛЭ-1	0,35	26	110	36	10
		30	150		12
		35	170		14

Марка	Толщина, мм	Ширина, мм	Разрывная нагрузка на ширину ленты, Н, не менее	Потери массы при прокаливании, %	Масса одного метра длины, г
ЛАЛЭ-2	0,35	25	105	36	10
		30	140		12
		35	160		14
ЛАТ	0,60	20	80	34	12
		26	130		14
		30	140		16
	0,50	175	Не определяется		84

## 21.10. Диэлектрические волокнистые пропитанные материалы

Диэлектрические волокнистые пропитанные материалы — это хлопчатобумажные, шелковые, стеклянные и иные ткани или ленты с высокомолекулярными связующими.

### 21.10.1. Лакоткани

*Лакоткань электроизоляционная.* В соответствии с ГОСТ 2214-78, а также ТУ16-90И37.0012.002ТУ изготовляют из хлопчатобумажной, шелковой и капроновой ткани, пропитанной масляными или битумно-масляными электроизоляционными лаками.

Характеристики лакотканей на основе хлопчатобумажных, шелковых и капроновых тканей приведены в табл. 21.44 и 21.45.

Таблица 21.44  
Марки и характеристики электроизоляционных лакотканей

Марки	Номинальная толщина, мм	Предельное отклонение, мм	Характеристика лакоткани
ЛХМ-105	0,15; 0,17; 0,20;	±0,02	Для работы на воздухе
ЛХНС-105	0,24; 0,30 6,17; 0,20	+0,12 ±0,92	С повышенными диэлектрическими свойствами для работы на воздухе
ЛХММ-105	0,17; 0,20; 0,24	±0,02	Допускается для работы в трансформаторном масле
ЛХБ-105	0,17; 0,20; 0,24	±0,02	Для работы в горячем трансформаторном масле с температурой до +105 °С Для работы на воздухе

Марки	Номинальная толщина, мм	Предельное отклонение, мм	Характеристика лакоткани
ЛШМ-105	0,08; 0,10 0,12; 0,15	+0,01	С малой усадкой и стойкостью к кратковременному повышению температуры, возможному в процессе пайки при монтаже электрических машин, аппаратов и трансформаторов, для работы на воздухе
ЛШМС-105	0,04; 0,05 0,06 0,10 0,12 0,15	±0,01 ±0,01 ±0,01 +0,02 -0,01	То же, с повышенными диэлектрическими свойствами для работы на воздухе
ЛКМ-105	0,10; 0,12; 0,15	±0,01	С повышенной эластичностью для работы на воздухе
ЛКМС-105	0,10 0,12 0,15	±0,01 +0,02 -0,02	То же, с повышенными диэлектрическими свойствами для работы на воздухе. Допускается работа в трансформаторном масле

Буквы и цифры в обозначении марок означают: Л — лакоткань; Х — хлопчатобумажная; Ш — шелковая; К — капроновая; М (на третьем месте в обозначении) — на основе масляного лака; М (на четвертом месте) — маслостойкая; Б — на основе битумно-масляного лака; С — специальная; 105 — температура, характеризующая класс нагревостойкости лакоткани.

Таблица 21.45  
Пробивное напряжение лакотканей

Марка лакоткани	d, м	При 15...35 °С и относительной влажности воздуха 45...75%				При 105±2 °С		После выдерж- ки при 20±2 °С и относитель- ной влажност- ной воздуха 95%	
		до перегиба		после перегиба					
		U <sub>СР</sub> , кВ	U <sub>ОТ</sub> , кВ	U <sub>СР</sub> , кВ	U <sub>ОТ</sub> , кВ	U <sub>СР</sub> , кВ	U <sub>ОТ</sub> , кВ		
ЛХМ-105	0,16	6,0	4,0	3,6	2,9	4,0	2,5	2,2	1,5
	0,17	6,5	4,2	4,2	3,0	4,5	3,0	2,8	1,8
	0,20	7,2	4,6	4,3	3,3	6,2	3,3	3,1	2,0
	0,24	8,5	5,2	5,2	3,5	6,0	3,9	3,5	2,2
	0,30	9,5	5,5	5,5	4,0	6,5	4,0	4,0	2,5
ЛХМС-105	0,17	7,0	4,5	4,8	3,2	5,0	3,2	3,0	1,9
	0,20	7,4	4,8	5,0	3,5	5,4	3,4	3,5	2,2
ЛХММ-105	0,17	7,5	4,8	4,8	3,2	6,0	3,2	3,2	2,0
	0,20	8,3	5,0	5,0	3,5	6,6	3,4	3,6	2,3
	0,24	9,2	5,4	5,4	3,9	6,0	4,0	4,0	2,5
ЛХБ-105	0,17	7,1	4,5	4,8	3,0	4,8	3,0	2,5	2,0
	0,20	8,0	4,8	5,4	3,3	5,4	3,3	2,7	2,2
	0,24	9,2	5,2	6,0	3,5	6,0	3,6	3,6	2,8

Марка лакоткани	d, м	При 15...35 °С и относительной влажности воздуха 45...75%				При 105±2 °С		После выдерж- ки при 20±2 °С и относитель- ной влажности воздуха 95%	
		до перегиба		после перегиба					
		U <sub>CP</sub> , кВ	U <sub>OT</sub> , кВ	U <sub>CP</sub> , кВ	U <sub>OT</sub> , кВ	U <sub>CP</sub> , кВ	U <sub>OT</sub> , кВ	U <sub>CP</sub> , кВ	U <sub>OT</sub> , кВ
ЛШМ-105	0,08	4,5	2,3	3,0	1,6	3,0	1,8	1,8	1,4
	0,10	5,6	3,5	4,2	2,1	4,2	2,1	2,8	2,0
	0,12	7,0	4,5	6,0	3,0	6,0	2,5	3,5	2,5
	0,18	8,5	5,0	6,6	3,5	5,6	3,0	3,8	2,8
ЛШМС-105	0,04	0,4	—	—	—	—	—	—	—
	0,05	1,2	—	—	—	—	—	—	—
	0,06	3,0	1,0	—	—	1,0	—	—	—
	0,10	6,6	4,0	5,1	2,8	4,8	2,6	2,8	2,0
ЛКМ-105	0,12	9,0	6,0	6,6	3,2	5,4	3,3	3,7	2,6
	0,15	9,3	6,5	7,5	3,9	7,2	3,4	4,2	2,7
	0,10	5,0	3,3	4,2	2,1	4,2	1,9	2,4	1,7
	0,12	6,0	4,2	6,4	2,8	4,8	2,5	2,8	2,0
ЛКМС-105	0,15	7,8	4,5	6,6	3,5	5,4	3,1	3,4	2,3
	0,10	6,0	3,6	5,0	2,7	4,4	2,4	2,4	2,0
	0,12	9,0	6,0	6,6	3,2	5,0	3,0	3,6	2,4
	0,15	9,3	6,0	7,5	3,9	6,6	3,2	4,2	2,7

В табл. 21.45 приняты следующие обозначения:  $d$  — нормальная толщина лакоткани, мм;  $U_{CP}$  — среднее значение пробивного напряжения, кВ;  $U_{OT}$  — значение пробивное напряжения в отдельных точках, кВ. После 24-часовой выдержки в среде с относительной влажностью воздуха 95±2 % при 20±2 °Сдельное объемное электрическое сопротивление лакоткни составляет  $10^8$  Ом·м. Удельное объемное электрическое сопротивление лакоткани марки ЛШМС-105 толщиной 0,04 и 0,05 мм не нормируется.

Средняя масса 1 м<sup>2</sup> лакоткани приведена в табл. 21.46.

Таблица 21.46  
Средняя масса 1 м<sup>2</sup> лакоткани

Марка	$d$ , мм	Масса, кг	Марка	$d$ , мм	Масса, кг
ЛШМС-105	0,04	0,040	ЛХМ-105	0,15	0,175
	0,05	0,050	ЛХМ-105, ЛХМС-105,	0,17	0,195
	0,06	0,070	ЛХММ-105, ЛХБ-105	0,20	0,250
ЛШМ-105	0,08	0,090	ЛХМ-105, ЛХММ-105,	0,24	0,285
ЛШМ-105,	0,10	0,115	ЛХБ-105	0,24	0,285
ЛШМС-105					
ЛКМС-105	0,12	0,130	ЛХМ-105	0,30	0,350
	0,15	0,160			

**Стеклолакоткани.** Стеклолакоткань электроизоляционную изготавливают в соответствии с ГОСТ 10156-78, ТУ 16-503.186-91, ТУ 16-90И37.0003.003ТУ из стеклянных тканей марки Э-2 толщиной от 0,043 до 0,125 мм и марки Э-27 толщиной до 0,04 мм, пропитанных электроизоляционными лаками.

Стеклолакоткани обладают повышенной нагревостойкостью по сравнению с лакотканями. Стеклолакоткани, пропитанные раствором кремнийорганического каучука, обладают повышенной короностойкостью.

Марки и характеристики стеклолакотканей приведены в табл. 21.47.

Таблица 21.47

Марки и характеристики стеклолакотканей

Марка	Номинальная толщина, мм	Предельные отклонения, мм	$\Delta$ , %	Применение
ЛСМ-105/120	0,15; 0,17; 0,20 0,24	$\pm 0,02$ $\pm 0,02$	6	Для работы на воздухе
ЛСММ-105/120	0,17; 0,20 0,24	$\pm 0,02$ $\pm 0,02$	6	Для работы в горячем трансформаторном масле (с температурой до 105 °С)
ЛСЛ-105/120	0,15; 0,17; 0,20	$\pm 0,02$	10	Для работы на воздухе
ЛСЭ-105/130	0,12; 0,15; 0,17; 0,20 0,24	+0,01 -0,02 $\pm 0,02$	10 — —	То же
ЛСБ-120/130	0,12 0,15; 0,17; 0,20 0,24	+0,02 -0,01 $\pm 0,02$	6	Для работы на воздухе при повышенной влажности (относительная влажность 95% при 20 °С)
ЛСП-130/155	0,08; 0,10  0,12 0,15; 0,17	+0,01 -0,02 +0,01 $\pm 0,02$	6	Для работы на воздухе при повышенной влажности. Допускается работа в горячем трансформаторном масле
ЛСК-155/180	0,05; 0,06; 0,08 0,10 0,12; 0,16 0,17; 0,20	$\pm 0,01$ +0,02 $\pm 0,02$ +0,02	6	Для работы на воздухе при повышенной влажности (включая тропические условия)
ЛСКК-180	0,12; 0,15; 0,17; 0,20	$\pm 0,02$	—	В электрических машинах и аппаратах, для изготовления композиционных материалов
ЛСКР-180	0,12; 0,15; 0,17; 0,20	$\pm 0,02$	10	Для работы на воздухе при повышенной температуре и влажности
ЛСКЛ-155	0,12; 0,15	$\pm 0,02$	—	Для работы на воздухе

В таблице буквой  $\Delta$  обозначено относительное удлинение стеклолакоткани при растяжении, %. Буквы и цифры в наименовании марок означают: Л — лакоткань; С — стеклянная; М (на третьем месте в обозначении) — на основе масляного лака; М (на четвертом месте) — маслостойкая; Л — (на третьем месте) — на основе лака из продукта термической обработки синтетического каучука с добавкой эскапонового лака; Б — на основе битумно-масляно-алкидного лака; П — на основе полиэфирноэпоксидного лака; К — на основе кремнийорганического лака; КР — кремнийорганическая резиновая; Л (на четвертом месте) — липкая; цифры 105, 120, 130, 155, 180 — температура, характеризующая нагревостойкость стеклолакоткани; через дробь указываются пределы этих значений.

Значения удельного объемного электрического сопротивления стеклолакоткани при различных температурах и влажности приведены в табл. 21.48.

Таблица 21.48

Удельное объемное электрическое сопротивление стеклолакоткани

Марка стеклола- коткани	Удельное объемное электрическое сопротивление, Ом·м, не менее						
	при 15...35°С и относитель- ной влажности 45...75%	при повышенной температуре, °С					после 24 ч при 20±2 °С и относитель- ной влажности 95±2%
		120	130	155	180	200	
ЛСМ- 105/120	10 <sup>11</sup>	10 <sup>8</sup>	—	—	—	—	10 <sup>9</sup>
ЛСММ- 105/ 120	10 <sup>11</sup>	10 <sup>8</sup>	—	—	—	—	10 <sup>9</sup>
ЛСЛ- 105/120	10 <sup>12</sup>	10 <sup>9</sup>	—	—	—	—	10 <sup>9</sup>
ЛСЭ- 105/130	10 <sup>12</sup>	—	10 <sup>9</sup>	—	—	—	10 <sup>9</sup>
ЛСБ- 120/130	10 <sup>12</sup>	—	10 <sup>8</sup>	—	—	—	10 <sup>10</sup>
ДСП- 130/155	10 <sup>10</sup>	—	—	10 <sup>7</sup>	—	—	10 <sup>8</sup>
ЛСК- 155/180	10 <sup>12</sup>	—	—	—	10 <sup>9</sup>	—	10 <sup>11</sup>
ЛСКР- 180	10 <sup>12</sup>	—	—	—	—	10 <sup>10</sup>	10 <sup>10</sup>
ЛСКЛ- 155	10 <sup>12</sup>	—	—	—	—	—	—

*Стеклолакоткань полиуретановая ЛСУ.* Стеклолакоткань полиуретановую изготавливают марки ЛСУ из стеклянной ткани марки Э-2, пропитанной полиуретановым лаком. Применяется для изолирования лобовых частей, перемычек, выводных кабелей статорных обмоток крупных электрических машин, для изолирования внутримашинных соединений. Класс нагревостойко-

сти стеклолакоткани 155. Марка ЛСУ означает: Л — лакоткань; С — стеклянная; У — на основе полиуретанового лака.

Удельное объемное электрическое сопротивление зависит от температуры и составляет: при 15...35 °С не менее  $10^{11}$  Ом·м; при 155 °С не менее  $10^8$  Ом·м; после 24 часов выдержки при  $20 \pm 2$  °С и относительной влажности  $95 \pm 2\%$  не менее  $10^{10}$  Ом·м.

Значения пробивного напряжения стеклолакоткани ЛСУ для различных условий приведены в табл. 21.49.

Таблица 21.49

Пробивное напряжение стеклолакоткани марки ЛСУ

Толщина, мм	Пробивное напряжение, кВ, не менее									
	при 15...33 °С				при 155±2 °С		после 24 ч при 20 °С и относительной влажности 95±2%		После 96 ч при 150±2 °С	
	до перегиба		после перегиба							
	$U_{CP}$	$U_{OT}$	$U_{CP}$	$U_{OT}$	$U_{CP}$	$U_{OT}$	$U_{CP}$	$U_{OT}$	$U_{CP}$	$U_{OT}$
0,13	7,0	5,5	5,0	2,5	3,5	2,0	4,5	3,0	7,5	6
0,15	8,0	6,0	5,5	3,0	4,5	3,0	5,0	3,0	8.5	6.5
0,17	9.5	6.5	6,0	4,0	5,0	3,5	5,5	4,0	10	7

*Стеклолакоткань электроизоляционная марки ЛСК-2.* Изготавливают из стеклоткани марки Э, пропитанной теплостойкой кремнийорганической эмалью. Марка ЛСК-2 означает: Л — лакоткань, С — стеклянная, К — кремнийорганическая, 2 — эластичная (мягкая). Применяют в качестве электроизоляционного материала в электрических машинах с рабочей температурой до 180 °С.

Пробивное напряжение стеклоткани приведено в табл. 21.50.

Таблица 21.50

Пробивное напряжение стеклолакоткани марки ЛСК-2

Толщина, мм	Пробивное напряжение, кВ, не менее							
	при 15...35 °С и относительной влажности 45...75%				при 180 °С		после 24 ч при 20 °С и относительной влажности 95± 2%	
	до перегиба		после перегиба					
	$U_{CP}$	$U_{OT}$	$U_{CP}$	$U_{OT}$	$U_{CP}$	$U_{OT}$	$U_{CP}$	$U_{OT}$
0,12	5,0	2,6	2,0	0,8	2,0	1,4	2,6	1,3
0,15	6,6	3,5	3,0	1,6	3,0	2,2	3,5	2,5
0,20	7.5	4,3	4,7	2.4	4,6	3,0	4,2	2,8

Удельное объемное электрическое сопротивление стеклолакоткани ЛСК-2 зависит от температуры: при 15...35 °С — не менее  $10^{11}$  Ом·м; при 180 °С —  $10^9$  Ом·м; после 24 часов выдержки при 20 °С и относительной влажности 95% — не менее  $10^{10}$  Ом·м.

### 21.10.2. Ленты электроизоляционные

*Лента смоляная* изготавливается из хлопчатобумажной ткани, пропитанной битуминозным составом и предназначена для уплотнения мест ввода кабелей и проводов в соединительных муфтах и коробках, для изоляции изолированных проводов в местах вязки, а также для защиты от влаги концов кабелей и проводов. Ленту поставляют в роликах. Толщина ленты 0,6; 0,8; 1,0 мм, ширина ролика 30; 60; 60 мм. Диаметры ролика: наружный 160, внутренний 35 мм.

Средняя электрическая прочность для толщины 0,6 мм не ниже 1,5 МВ/м, для толщины 0,8...1,0 мм не ниже 2,5 МВ/м.

*Лента липкая электроизоляционная на поликасиновом кампаунде* (ТУ 16-503.135-79) представляет собой нарезанную на полосы вдоль основы стеклолакоткань, пропитанную лаками из органического синтетического каучука, на которую с двух сторон нанесен слой клеящего поликасинового компаунда.

Лента выпускается четырех марок: ЛСППЛ, ЛСППЛМ, ЛСЭПЛ, ЛСЭПЛМ. Буквы в наименовании марок означают; Л (на первом месте) — лента; Л (на пятом месте) — липкая; С — стеклянная; П (на третьем месте) — поликасиновая стеклоткань; П (на четвертом месте) — поликасиновый компаунд; Э — эскапоновая стеклолакоткань; М — для механизированного изолирования.

Лента выпускается в роликах диаметром 75 мм. Ширина роликов 20 и 30 мм для лент марок ЛСППЛ и ЛСЭПЛ и 20, 23, 25 и 30 мм для ЛСППЛМ и ЛСЭПЛМ. Толщина липкой ленты 0,14; 0,17; 0,19 мм. Плотность ленты 1,2...1,3 г/см<sup>3</sup>. Электрическая прочность ленты для всех марок и толщин: 60 МВ/м — средняя и 27 МВ/м — минимальная.

*Лента изоляционная прорезиненная* изготавливается из сурового миткаля, промазанного липкой резиновой смесью с одной стороны (односторонняя лента) или с двух сторон (двухсторонняя). Применяют ленту для изоляции соединений в машинах малой мощности напряжением до 1000...1400 В и аппаратах, а также при монтаже электроосветительных внутренних сетей. Лента выпускается пяти марок: 1ПОЛ, 2ПОЛ — ленты односторонняя и двухсторонняя обычной липкости промышленного применения на напряжения до 1000 В; 1ШОЛ и 2ШОЛ — то же,

но широкого (бытового) применения; 2ППЛ — лента двусторонняя повышенной липкости на напряжение до 1400 В.

Лента из поливинилхлоридного пластика предназначена для защиты и дополнительной изоляции проводов и кабелей. Выпускается в роликах. Диапазон допустимых температур от  $-60$  до  $+70$  °С. Параметры ленты приведены в табл. 21.51.

Таблица 21.51  
Лента из поливинилхлоридного пластика

Ширина, мм	Толщина, мм	Ширина, мм	Толщина, мм
10	0,65	20	0,55; 0,9; 1,5
13	0,55	40	0,55; 0,9; 1,35
15	0,65; 1,5	50	0,9
18	0,55		

Лента электроизоляционная термостойкая самоклеящаяся резиновая радиационной вулканизации ЛЭТСАР. Применяют ленту для изоляции обмоток электрических машин и кабельной арматуры. Лента поставляется в роликах диаметром 130...150 мм, имеет фасонное (а) и прямоугольное (б) сечение (рис. 21.2). Изготовлена из электроизоляционного материала, эластичного, влагостойкого, стойкого к озону, ультрафиолетовым лучам, ряду масел, химических веществ. Рабочая температура ленты (а) от  $-50$  до  $+250$  °С (кратковременно 300 °С), лента (б) — от  $-50$  до  $+200$  °С (кратковременно 250 °С); самослипание при  $-35$  °С — 48 ч, при 150 °С — 3 ч. Параметры ленты приведены в табл. 21.52.

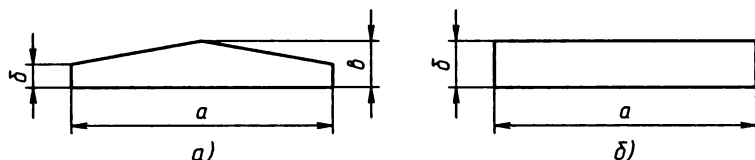


Рис. 21.2. Поперечное сечение ленты ЛЭТСАР

Таблица 21.52  
Лента электроизоляционная ЛЭТСАР

Марка ленты	Цвет ленты	Размеры сечения, мм		
		а	б	в
ЛЭТСАР КФ-0,5	Красный	26	0,2	0,5
ЛЭТСАР БФ-0,5	Белый	26	0,1	0,25
ЛЭТСАР КФ-0,5	Красный	26	0,1	0,25
ЛЭТСАР КП-0,2-26	Красный	26	0,2	—
ЛЭТСАР КП-0,2-29	Красный	29	0,2	—
ЛЭТСАР КП-0,2-38	Красный	38	0,2	—
ЛЭТСАР БП-0,2	Белый	26	0,2	—

## 21.11. Пластические массы

К пластическим массам относят композиционные порошковые или гранулированные прессовочные массы и слоистые пластики.

*Композиционные порошковые или гранулированные пластмассы*, или прессовочные, состоят из связующего вещества — искусственных смол (пространственных или линейных полимеров), наполнителей (стекловолокно, асбестовое волокно, очесы хлопчатника, кварцевый песок, каолин, древесная мука и др.), красителей, а также пластификаторов для придания изделиям из пластмассы наилучших технологических свойств. Изделия из термореактивных пластмасс изготавливаются, как правило, методом горячего прессования, а изделия из термопластичных пластмасс — путем литья под давлением.

*Слоистые пластики* относятся к разновидности композиционных пластмасс, в которых в качестве наполнителя используются листовые волокнистые материалы. К слоистым пластикам относятся гетинакс и текстолит.

### 21.11.1. Аминопласты

Это термореактивные прессовочные массы на основе аминосмол и органических либо минеральных наполнителей, либо их сочетаний. Выпускаются в виде порошка, крошки, волокон и делятся на классы и группы.

Сведения о классах и группах аминопластов представлены в табл. 21.53. Основные свойства изделий из аминопластов приведены в табл. 21.54.

Таблица 21.53  
Классы и группы аминопластов

Класс аминопластов	Группы	Область применения
В — с повышенными электроизоляционными свойствами	В1, В2, В3, В4, В5	Для изготовления деталей электротехнического назначения
Г — с улучшенными технологическими свойствами	Г1, Г2	Для изготовления деталей электротехнического назначения
Д — с повышенными теплостойкостью и дугостойкостью	Д1	Для изготовления деталей электротехнического назначения, к которым предъявляются требования повышенных дугостойкости и теплостойкости

Класс аминопластов	Группы	Область применения
Е — с повышенными механической прочностью, теплостойкостью и дугостойкостью	Е1	Для изготовления деталей электротехнического назначения, к которым предъявляются повышенные требования по дугостойкости и теплостойкости, механической прочности, износостойкости в условиях нормального и влажного тропического климата (при относительной влажности 93% и 35 °С)

Таблица 21.54  
Основные свойства изделий из аминопластов

Показатель	Классы и группы								
	В					Г		Д	Е
	В1	В2	В3	В4	В5	Г1	Г2	Д1	Е1
Текущесть, мм	140... 195	120... 195	120... 195	Бо- лее 200	100... 195	120... 195	120... 195	90... 150	120... 190
Общее содержание летучих веществ и влаги, %, не более	4,6	5,0	6,0	6,0	2,0	6,0	5,0	5,0	2...4
Теплостойкость по Мартенсу, °С, не менее	140	130	130	140	130	170	160	200	180
Плотность, г/см <sup>3</sup>	1,6... 1,85	1,6... 1,85	1,6... 1,9	1,6... 1,85	1,6... 1,85	1,6... 1,8	1,6... 1,8	1,7... 1,9	1,7... 2,0
Разрушающее напряжение при изгибе, МПа, не менее	63,7	49	49	58,8	49	63,9	49	34,3	68,6
Удельное поверхностное электрическое сопротивление, Ом, не менее	10	10	10	10	10	2,10	10	10	10

Порошки В1, В2, В4, Г1, Г2 имеют цвета от светлого до темно-серого, В3 — зеленого и черного цветов, В5 — серого цвета, Д1 — крошка серого цвета.

### 21.11.2. ДСВ пластмасса

ДСВ пластмасса выпускается в виде гранул из связующей формальдегидной смолы и комплексных стеклянных нитей. ДСВ означает: дозирующийся стекловолокнистый и относится к числу термореактивных пластмасс. Неокрашенный материал имеет желтый цвет, окрашенный может быть красным, оранжевым, зеленым, салатным и черным. Из нее изготавливают электротехнические детали, работающие при температуре от  $-60$  до  $+200$  °С и в условиях тропического климата. Различают два вида ДСВ: ДСВ-2-Р-2М и ДСВ-4-Р-2М. В зависимости от длины гранул и способа обработки различают марки Л, О и П. Пластмасса марки Л имеет длину гранул до 6 мм, применяется для изготовления тонкостенных деталей литьевым прессованием; марка О — длину гранул 10 мм, для литьевого и прямого прессования; марка П — длину гранул 20 мм, для изготовления высокопрочных, крупногабаритных деталей прямым прессованием.

В табл. 21.55 приведены основные свойства пластмассы на основе прессовочного материала ДСВ

Таблица 21.55

Основные свойства прессовочного материала ДСВ

Показатель	Значение
Содержание связующего, %	38...39
Содержание влаги и летучих, %	1,5...3,0
Содержание растворимых веществ связующего в этиловом спирте, %, не менее	80%
Разрушающее напряжение при сжатии для неокрашенного материала, МПа, не менее	127,4
Удельное объемное электрическое сопротивление, Ом·м	$10^{10}$
Электрическая прочность для неокрашенного материала, МВ/м	
Тангенс угла диэлектрических потерь при частоте $10^6$ Гц, не более:	
для неокрашенного	0,04
для окрашенного	0,05

### 21.11.3. Пластмасса марки АГ-4

Пластмасса АГ-4 является прессовочным термореактивным волокнистым материалом на основе фенолформальдегидной смолы и стекловолокна или стеклонити. Применяют для изготовления электротехнических изделий, обладающих повышенной прочностью для работы при температуре от  $-196$  до  $+200$  °С

и в тропических условиях. Цвет материала желтый различных оттенков.

Выпускают материал в виде брикетов — марки В; в виде стеклоленты — марки С, в которой крученые стеклянные нити пропитаны смолой; в виде стеклоленты — марки НС на основе стеклянных комплексных нитей, пропитанных связующим. Марки и основные свойства материала АГ-4 приведены в табл. 21.56.

Таблица 21.56

Основные свойства прессовочного материала АГ-4

Показатель	Марки		
	В	С	НС
Плотность, г/см <sup>3</sup>	1,7...1,9	1,7...1,9	—
Содержание связующего, %	38	30	30
Теплостойкость по Мартенсу, °С, не менее	280	280	—
Водопоглощение, %, не более	0,2	0,2	—
Расчетная усадка при прессовании, %, не более	0,16	0,15	—
Разрушающее напряжение при растяжении, МПа, не менее	—	490	490
Разрушающее напряжение при изгибе, МПа, не менее	147	441	441
Ударная вязкость, кН·м/м <sup>2</sup> , не менее	49	196	245
Относительная диэлектрическая проницаемость при 10 <sup>6</sup> Гц	8,0	8,0	8,0
Тангенс угла диэлектрических потерь при 10 <sup>6</sup> Гц, не более	0,05	0,05	0,05
Удельное объемное электрическое сопротивление, Ом·м	10 <sup>10</sup>	10 <sup>10</sup>	10 <sup>10</sup>
Удельное поверхностное электрическое сопротивление, Ом·м	10 <sup>12</sup>	10 <sup>12</sup>	10 <sup>12</sup>
Электрическая прочность при частоте 50 Гц, МВ/м, не менее	13	13	13
Содержание влаги и летучих веществ, %	2...7	2...5	2...8

#### 21.11.4. Пластмассы на основе кремнийорганической смолы и минеральных наполнителей

К ним относятся материалы К-41-5 (смола и асбестовое волокно), КМК-218 и КМК-218Л (смола, асбест и молотый кварц). Из них изготовляют изделия, предназначенные для работы при температуре до 300 °С. Основные свойства материалов приведены в табл. 21.57.

Таблица 21.57

Пластмассы на основе кремнийорганической смолы  
и минеральных наполнителей

Показатель	КМК-218	КМК-218Л	К-41-5
Плотность, г/см <sup>3</sup>	1,8...2	1,7...2	1,9
Текучесть, мм	120...170	150...190	140
Содержание летучих, %, не более	2	—	—
в пределах	—	2...4	—
Усадка, %, в пределах,	0,3...0,6	0,3...0,5	—
не более	—	—	0,8
Водопоглощение, мг, не более	—	—	50
Ударная вязкость, кН·м/м <sup>2</sup> , не менее	6,9	6,9	6,9
Разрушающее напряжение при статическом изгибе, МПа (кгс/см <sup>2</sup> ), не менее	29,4	29,4	63,7
Дугостойкость при 60 мА, с, не менее	180	180	—
Электрическая прочность, МВ/м, не менее	5	3	4
Удельное объемное электрическое сопротивление, Ом·см, не менее	—	—	10 <sup>11</sup>

### 21.11.5. Полистирол

Для изготовления технических изделий применяют полистиролы марок ПСЭ-2, ПСМ, ПСС и ПССП, для изготовления электротехнических изделий — полистирол марки ПСМД, который поставляется в виде гранул размером 5х5 мм.

Технические данные изделий из полистирола приведены в табл. 21.58.

Таблица 21.58

Технические данные изделий из полистирола

Показатель	ПСЭ-1	ПСЭ-2	ПСМД	ПСМ	ПСС	ПССП
Содержание влаги, %, не более	0,3	0,3... 0,1	0,15	0,15	0,2	0,2
Температура размягчения по Вика, °С, не ниже	90	90	82	82	85	82
Ударная вязкость, кН·м/м <sup>2</sup> , не менее	—	1,7	1,6	1,6	1,8	1,8
Разрушающее напряжение при растяжении, МПа, не менее	39,2	39,2	36,2	33,2	44,1	44,1
Тангенс угла диэлектрических потерь при 10 <sup>6</sup> Гц, не более	0,0003	0,0003	0,0003	0,0004	0,0004	0,0009
Относительная диэлектрическая проницаемость при 10 <sup>6</sup> Гц, не более	2,7	2,6	2,6	2,6	2,7	2,7

## 21.11.6. Фторопласты

В электротехнике используются фторопласт-3 (продукт полимеризации трифторхлорэтилена), фторопласт-4 (продукт полимеризации тетрафторэтилена).

*Фторопласт-3* выпускается следующих марок: А — для получения масел и смазок; Б — для получения масел и смазок, изделий методом эструзии, литья под давлением, порошкового напыления и В — для изготовления изделий специального назначения путем прессования. Технические данные марок фторопласта-3 приведены в табл. 21.59.

Таблица 21.59  
Технические данные марок фторопласта-3

Показатель	Марки		
	А	Б	В
Массовая доля влаги, %, не более	0,05	0,05	0,05
Термостабильность, %, не более	0,2	0,12	0,12
Предел текучести при растяжении, МПа, не менее	29,4	35,3	37,3
Разрушающее напряжение при растяжении, МПа, не менее	—	—	26,5
Относительное удлинение при разрыве, %, не менее	—	60	75
Электрическая прочность, МВ/м, не менее	—	15	15
Удельное объемное электрическое сопротивление, Ом·м, не менее	—	10 <sup>6</sup>	10 <sup>6</sup>

*Фторопласт-4* выпускают в виде порошка белого цвета и используют для изготовления изделий и пленок с высокими электрическими свойствами, а также стойких к действию агрессивных сред при температуре до 260 °С. Марки фторопласта-4: О — для изготовления изделий общего назначения; П — для изготовления конденсаторных и электроизоляционных пленок; ПН — для электротехнических изделий высокой надежности; С — для специзделий; Т — для изготовления труб и толстостенных изделий. Технические данные марок фторопласта-4 приведены в табл. 21.60.

Фторопласт-4Д и фторопласт-4ДМ являются модификацией фторопласта-4 и выпускаются в виде порошка трех сортов. Используются для изготовления кабельных оболочек и электроизоляционных трубок, а также тонкостенных труб и иных изделий, стойких к воздействию агрессивных сред. Диапазон рабочих температур изделий от -60 до +250 °С. Технические данные фторопласта-4Д приведены в табл. 21.61, а электроизоляционных трубок из фторопласта-4Д и -4ДМ — в табл. 21.62.

Таблица 21.60

Технические данные марок фторопласта-4

Показатель	О	П	ПН	С	Т
Плотность, г/см <sup>3</sup> , не более	2,20	2,19	2,19	2,19	2,21
Разрушающее напряжение при растяжении незакаленного образца, МПа, не менее	22,5	24,5	24,5	25,5	14,7
Относительное удлинение при разрыве незакаленного образца, %, не менее	350	350	350	350	250
Термостабильность, ч, не менее	100	100	100	100	15
Удельное объемное электрическое сопротивление, Ом·м, не менее	—	10 <sup>17</sup>	10 <sup>17</sup>	10 <sup>17</sup>	—
Тангенс угла диэлектрических потерь при 10 <sup>6</sup> Гц, не более	—	0,00025	0,00025	0,00025	—
Относительная диэлектрическая проницаемость при 10 <sup>6</sup> Гц	—	2,0	2,0	2,0	—
Электрическая прочность, МВ/м, не менее	—	60	50	50	—

Таблица 21.61

Технические данные фторопласта-4Д и 4ДМ

Показатель	Сорт 1	Сорт 2	Сорт 3
Плотность, г/см <sup>3</sup> , не более	2,21	2,23	—
Содержание влаги, %, не более	0,02	0,02	0,02
Разрушающее напряжение при растяжении, МПа, не менее	19,6	15,7	11,8
Относительное удлинение при разрыве, %, не менее	330	250	100
Термостабильность, ч, не менее	15	10	—
Удельное объемное электрическое сопротивление, Ом·м, не менее	10	10	—
Тангенс угла диэлектрических потерь при 10 <sup>6</sup> Гц, не более	0,0003	0,0003	—
Относительная диэлектрическая проницаемость при 10 <sup>6</sup> Гц, не более	2,2	2,2	—

Таблица 21.62

Сечения и масса трубок из фторопласта-4Д и 4ДМ

Внутренний диаметр, мм	Толщина стенки, мм	Масса 1 м, г	Внутренний диаметр, мм	Толщина стенки, мм	Масса 1 м, г
0,3	0,2	0,68	2,6	0,4	8,30
0,4		0,81	2,8		8,84
0,5		0,97	3,0		9,33
0,6	0,3	1,10	3,5	0,6	16,9
0,7		1,23	3,8		18,1
0,8		1,33	4,0		18,9
1,0		1,65	4,2		19,7
1,0		2,68	4,5	1,0	20,98
1,2		3,08	5,0		23,10
1,4		3,50	5,0		41,20
1,5		3,70	5,5	1,5	44,40
1,6		3,91	6,0		48,50
1,8		4,30	6,0	1,5	77,22
2,0	0,4	4,73	7,0	1,0	54,80
2,1		6,86	8,0	1,5	97,90
2,2		7,13	8,0	2,0	137,30
2,4		7,85	9,0	1,5	108,0
2,5		7,96	10,0		118,40

## 21.11.7. Пластикат поливинилхлоридный

Пластикат поливинилхлоридный (ГОСТ 5960-72, ТУ-6-02-51-90) — термопластичный материал, предназначенный для изоляции, а также для защитных оболочек проводов и кабелей. Пластикат выпускается четырех типов и 14 марок:

И — изоляционный: И40-13, И50-13, И40-14, И50-14, И60-12;

ИТ — изоляционный термостойкий: ИТ-105;

ИО — изоляционный для оболочек: ИОЗ0-11, ИО43-12, ИОМ-40-8;

О — для оболочек: О-40, О-50, О-55, ОМБ-60, ОНМ-60, ОНЗ-40.

Поливинилхлоридные пластификаты (ПВХП) представляют собой смеси из поливинилхлорида с пластификаторами, ста-

билизаторами и иными добавками, которые придают ПВХП эластичность, облегчают его обработку, однако ухудшают его электроизоляционные свойства, нагревостойкость, химическую стойкость. К ПВХП общего применения относятся марки: И 40, И 45, И 50, И 60. ПВХП пониженной горючести марки НГП 40-32 и НГП 30-32 выпускается в соответствии с ТУ 2246-425-05761784-98, ПВХП марки ИМ 40-8, ИОМ 40-8 — в соответствии с ТУ 6-02-51-90, ПВХП повышенной тепло- и бензомаслостойкости марки ИТ-105В — в соответствии с ТУ 16.К 71-275-98.

ПВХП марок И 40-13, 40-13А, И 40-14 используются для изоляции проводов и кабелей в диапазоне температур от  $-40$  до  $+70$  °С. Для той же цели используются марки И 50-13, И 50-14 — в диапазоне температур от  $-50$  до  $+70$  °С, а И 60-12 — в диапазоне температур от  $-60$  до  $+70$  °С, все эти марки изоляции рекомендованы для районов Крайнего Севера. Для изоляции и оболочки проводов и кабелей используется марка И 45-12 в диапазоне температур от  $-45$  до  $+70$  °С.

Физические свойства и технические характеристики некоторых ПВХП представлены в табл. 21.63.

Таблица 21.63

Физические свойства и технические характеристики некоторых ПВХП общего применения

Параметр и единица измерения	И 40-13	И 40-14	ИО 45-12	И 50-13	И 50-14	И 60-12
Удельное объемное электрическое сопротивление при 20 °С, Ом·см	$1 \cdot 10^{13}$	$2 \cdot 10^{14}$	$1 \cdot 10^{12}$	$2 \cdot 10^{13}$	$1 \cdot 10^{14}$	$1 \cdot 10^{12}$
Удельное объемное электрическое сопротивление при 70 °С, Ом·см	$2 \cdot 10^{10}$	$1,5 \cdot 10^{12}$	—	$5 \cdot 10^{10}$	$1 \cdot 10^{12}$	$1 \cdot 10^{10}$
Прочность при разрыве, МПа, не менее	17,6	19,6	11,7	19,6	17,6	9,8
Относительное удлинение при разрыве, %	200	250	350	200	200	300
Температура хрупкости, °С, не выше	$-40$	$-40$	$-45$	$-50$	$-50$	$-60$
Потери в массе при нагреве до 160 °С в течение 6 час, %	2	2	2,5	2	2	2
Светостойкость при 70 °С, ч, не менее	1000	1000	1000	1000	1000	1000

Параметр и единица измерения	И 40-13	И 40-14	ИО 45-12	И 50-13	И 50-14	И 60-12
Горючесть (метод А), с, не более	30	15	30	60	15	30
Твердость при 20 °С, МПа, не менее	1,47	1,47... 1,96	1,07	5,8	не норм.	0,69
Твердость при 70 °С, МПа, не менее	0,78	0,68... 1,07	0,78	1,07	не норм.	0,39
Водопоглощение, %, не более	0,32	0,23	0,3	0,32	0,32	0,46
Температура размягчения, °С	180±10	180±10	170	190±10	175±10	175±10
Плотность, г/см <sup>3</sup>	1,27... 1,35	1,28... 1,32	1,2... 1,25	1,29... 1,35	1,26... 1,3	1,16... 1,24
Количество постоянных включений, не более	45	18	27	56	27	36

Пластикаты марок И40-13, И40-14, ИЗО-14 и И60-12 окрашены в следующие цвета: белый, черный, серый, голубой, синий, красный, розовый, оранжевый, коричневый, желтый, зеленый, фиолетовый; марки И50-13 — синий, зеленый; марки ИТ-105 — желтый, оранжевый, бордо, зеленый, синий, коричневый, черный, серый, розовый.

#### 21.11.8. Композиция полиэтилена для кабельной изоляции

Полиэтиленовая изоляция изготавливается на основе полиэтиленов низкой плотности (ПЭНП) и полиэтиленов высокой плотности (ПЭВП). ПЭНП получают полимеризацией этилена при высоком давлении, а ПЭВП — при низком давлении с применением металлоорганических катализаторов. Маркировка композиций на основе ПЭНП включает трехзначные цифры, начинающиеся с 1: 102, 107 и т. д. Маркировка на основе ПЭВП — цифры, начинающиеся с 2: 204, 206, 207 и т. д.

Электрическая прочность для полиэтиленовых изоляций (ПЭИ) толщиной 1 мм при частоте 50 Гц составляет 35...40 кВ/мм. Относительная диэлектрическая проницаемость при частоте 1 МГц изменяется в пределах 2,3...2,4. Тангенс угла диэлектрических потерь при той же частоте — в пределах от  $3 \cdot 10^{-4}$  до  $7 \cdot 10^{-4}$ . Области применения ПЭИ представлены в табл. 21.64.

Таблица 21.64

## Области применения полиэтиленовой изоляции

Марка композиций на основе полиэтилена высокого и низкого давления	Область применения
<i>Диапазон рабочих температур от -70 °С до +70 °С</i>	
102-01 К, 153-01 К, 178-01 К, 107-01 К, 180-01 К,	Для неокрашиваемой изоляции проводов и кабелей Рекомендованы для кабелей связи (кроме 180-01К)
102-02 К, 104-02 К, 107-02 К, 107-04, 153-02 К, 153-04 К, 178-02 К, 179-04 К, 180-02 К, 180-04 К	Для окрашиваемой и неокрашиваемой изоляции проводов и кабелей
102-09 К, 107-09 К, 153-09 К, 178-09 К	Для светостойкой изоляции проводов
<i>Диапазон рабочих температур от -60 до +90 °С</i>	
204-07 К, 206-07 К, 207-07 К, 208-07 К	Для окрашиваемой и неокрашиваемой изоляции проводов и кабелей
204-11 К, 206-11 К, 273-81 К	Для светостойкой изоляции проводов
271-70 К	Для изоляции проводов и кабелей

Термостабилизированные композиции имеют натуральный цвет, а светостабилизированные — черный.

## 21.11.9. Гетинаксы

Гетинакс электротехнический листовой (ГОСТ 2718-74) представляет собой слоистый прессованный материал, состоящий из двух или более слоев бумаги, пропитанной одной из термореактивных смол: фенолформальдегидной и крезолформальдегидной резольного типа, крезолфеноланилиноформальдегидной, эпоксидной. Прессование осуществляется под давлением 10...12 МПа при температуре 160 °С. Гетинакс выпускают в листах шириной от 450 до 930 мм и длиной от 700 до 1430 мм. Применяют в качестве электроизоляционного материала для длительной работы при температурах от -65 до +105 °С. Марки гетинакса обозначаются римскими цифрами от I до VIII:

I — для работы на воздухе при нормальных условиях и в трансформаторном масле при частоте 50 Гц и напряжении до 1000 В;

II — то же, с более широкими допусками по толщине;

III — для работы в корабельных условиях (относительная влажность до 95% и 20 °С) при частоте 50 Гц и напряжении до 1000 В;

V, V-1 и V-2 — для работы на воздухе при нормальных условиях (относительная влажность 45...75% при 15...35 °С) и в трансформаторном масле при частоте 50 Гц и напряжении свыше 1000 В;

VI — для работы на воздухе при нормальных климатических условиях (при относительной влажности воздуха 45...75% и 15...35 °С), при частоте  $10^8$  Гц и напряжении до 1000 В;

VII — то же с улучшенным тангенсом угла диэлектрических потерь и с пониженной стойкостью к кратковременному нагреванию;

VIII — для работы на воздухе при нормальных климатических условиях (при относительной влажности 45...75% и 15...35 °С), при частоте  $10^6$  Гц и напряжении до 1000 В; для изготовления печатных схем методом электрохимического осаждения меди. Физико-механические свойства гетинакса представлены в табл. 21.65.

Таблица 21.65

Физико-механические свойства гетинакса

Показатель	Марки							
	I	II	III	V	V-1 V-2	VI	VII	VIII
Плотность, г/см <sup>3</sup>	1,35... 1,45	1,35... 1,45	1,3... 1,4	1,28... 1,4	1,28... 1,4	1,3... 1,4	1,35... 1,45	1,3... 1,4
Разрушающее напряжение, МПа, не менее:								
а) при статическом изгибе перпендикулярно слоям (для листов толщиной $\geq 10$ мм):								
в продольном направлении	122,3	122,5	117,6	—	122,5	—	—	—
в поперечном направлении	103	103	98	—	103	—	—	—
б) при растяжении (для листов толщиной $\geq 1$ мм):								
в продольном направлении	98	98	88,2	88,2	88,2	98	98	88,2
в поперечном направлении	78,5	78,5	68,6	68,6	68,6	68,6	68,6	68,6

Показатель	Марки							
	I	II	III	V	V-1 V-2	VI	VII	VIII
Удельная ударная вязкость перпендикулярно слоям, кДж/м <sup>2</sup> , не менее:								
а) листы толщиной 1,2...9,5 мм:								
в продольном направлении	11,8	11,8	—	11,8	11,8	9,8	9,8	11,8
в поперечном направлении	7,8	7,8	—	7,8	7,8	7,8	7,8	7,8
б) листы толщиной ≥9,5 мм.								
в продольном направлении	19,6	19,6	17,6	—	17,6	—	—	—
в поперечном направлении	14,7	14,7	13,7	—	13,7	—	—	—
Сопротивление раскалыванию (листы толщиной ≥10 мм) кН/м, не менее	117,6	117,6	132,0	—	98,0	—	—	—
Теплостойкость по Мартенсу (для листа толщиной ≥10 мм) °С, не менее	150	150	150	—	150	—	—	—
Маслостойкость в трансформаторном масле в течение 4 ч при температуре, °С, не менее	105	105	105	130	130	—	—	—

Номинальная толщина листов гетинакса находится в пределах от 0,2 до 50 мм. Ряд стандартных толщин гетинакса, мм: 0,2; 0,25; 0,3; 0,33; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1,0; 1,1; 1,2; 1,3; 1,4; 1,5; 1,6; 1,7; 1,8; 1,9; 2,0; 2,3; 2,5; 2,8; 3; 3,3; 3,6; 3,8; 4; 4,3; 4,5; 5; 5,5; 6; 6,3; 6,5; 7; 7,3; 7,5; 8; 8,5; 9; 9,5; 10; 10,5; 11; 11,5; 12; 12,5; 13; 13,5; 14; 14,5; 15; 16; 17; 18; 19; 20; 21; 22; 23; 24; 25; 26; 27; 28; 29; 30; 31; 32; 33; 34; 35; 36; 37; 38; 39; 40; 42; 44; 46; 48; 50.

Электрические свойства гетинакса приведены в табл. 21.66.

Таблица 21.66

Электрические свойства гетинакса

Показатель	Марки							
	I	II	III	V	V-1, V-2	VI	VII	VIII
Сопротивление изоляции (для листов толщиной ≥2 мм), Ом,								
в исходном состоянии	10 <sup>9</sup>	10 <sup>9</sup>	10 <sup>10</sup>	10 <sup>11</sup>	10 <sup>11</sup>	—	—	—
после 24 ч в камере влаж- ности	10 <sup>7</sup>	10 <sup>7</sup>	—	10 <sup>7</sup>	10 <sup>7</sup>	—	—	—
Удельное объемное элек- трическое сопротивление (для гетинакса марок I, II толщиной до 2 мм марок VI, VII, VIII толщиной до 3,8 мм), Ом·м, не менее:								
в исходном состоянии	10 <sup>8</sup>	10 <sup>8</sup>	—	—	—	10 <sup>8</sup>	10 <sup>9</sup>	10 <sup>10</sup>
после пребывания в тече- ние 24 ч в камере влаж- ности	10 <sup>6</sup>	10 <sup>6</sup>	—	—	—	10 <sup>7</sup>	10 <sup>7</sup>	10 <sup>8</sup>
Удельное поверхностное электрическое сопротивле- ние (для листов толщиной от 1 до 3,8 мм), Ом, не менее;								
в исходном состоянии	—	—	—	—	—	10 <sup>10</sup>	10 <sup>11</sup>	—
после 24 ч в камере влаж- ности	—	—	—	—	—	10 <sup>9</sup>	10 <sup>9</sup>	—
Тангенс угла диэлектриче- ских потерь при 50 Гц, не более:								
в исходном состоянии	—	—	—	0,45	0,45	—	—	—
после пребывания в тече- ние 24 ч в камере влаж- ности	—	—	—	0,10	0,10	—	—	—
Тангенс угла диэлектриче- ских потерь при частоте 10 <sup>6</sup> Гц:								
в исходном состоянии	—	—	—	—	—	0,06	0,045	0,035
после 24 ч в камере влаж- ности	—	—	—	—	—	0,08	0,06	0,05
Электрическая прочность перпендикулярно слоям при переменном напряжении 50 Гц, МВ/м толщиной, мм:								
до 1	20	20	—	—	—	26	33	30
свыше 1 — 2	16	16	—	—	—	22	27	27
свыше 2 — 3	12	12	13	25	—	20	22	25

## 21.11.10. Гетинакс фольгированный

Фольгированный гетинакс представляет собой слоистый пластик из пропитанной термореактивными связующими бумаги, облицованный с одной или с двух сторон медной электролитической фольгой. Фольгированный гетинакс предназначен для изготовления печатных плат с одно- или двухсторонним монтажом деталей. Выпускаются марки фольгированного гетинакса: ГФ-1-35, ГФ-1-35Г, ГФ-2-35, ГФ-2-35Г, ГФ-1-50, ГФ-1-50Г, ГФ-2-50, ГФ-2-50Г. Цифры означают: первая — 1 — облицованный фольгой с одной стороны, 2 — с двух сторон; вторая — толщина фольги: 35 — 0,035 мм, 50 — 0,050 мм. Буква Г в конце обозначения — облицованный гальваностойкой фольгой.

Толщины фольгированного гетинакса: 0,5; 0,8; 1,0; 1,5; 2,0; 2,5; 3,0 мм. Для всех толщин размеры листов гетинакса не менее 800х900 мм. Физико-механические и электрические свойства фольгированных гетинаксов приведены в табл. 21.67.

Таблица 21.67  
Физико-механические и электрические свойства фольгированных гетинаксов

Показатель	ГФ-1-35 ГФ-2-35 ГФ-1-50 ГФ-2-50	ГФ-1-35Г ГФ-2-35Г ГФ-1-50Г ГФ-2-50Г	ГФ-1-35Г* ГФ-2-35Г* ГФ-1-50Г* ГФ-2-50Г*
Прочность на отслаивание (на ширину полоски 3 мм), Н, не менее:			
в исходном состоянии	2,7	2,7	3,75
после кондиционирования в парах трихлорэтилена в течение 2 мин при 88...90 °С	2,7	2,7	3,75
после кондиционирования 20 мин в гальванических растворах при 70 °С	—	1,8	1,8
после воздействия теплового удара 10 с при 260 °С	2,7	2,7	3,75
Прочность на отрыв контактной площадки после воздействия в условиях кондиционирования при 270 °С в течение 8 с, Н	50	60	50
Водопоглощение после кондиционирования 24 ч при 23 °С, %, при толщине, мм:			
от 0,5 до 0,8	—	—	—
свыше 0,8 до 1,5	4,0	4,0	3,0
свыше 1,5 до 3	3,5	3,5	2,4
Удельное объемное электрическое сопротивление после кондиционирования 96 ч при 40 °С и относительной влажности воздуха 93±2%, Ом·м, не менее	5·10 <sup>6</sup>	5·10 <sup>6</sup>	5·10 <sup>8</sup>

Показатель	ГФ-1-35	ГФ-1-35Г	ГФ-1-35Г*
	ГФ-2-35	ГФ-2-35Г	ГФ-2-35Г*
	ГФ-1-50	ГФ-1-50Г	ГФ-1-50Г*
	ГФ-2-50	ГФ-2-50Г	ГФ-2-50Г*
Тангенс угла диэлектрических потерь при $10^6$ Гц после кондиционирования 96 ч при 40 °С и относительной влажности воздуха 93%, не более	0,085	0,085	0,05
* Для гетинакса высшего качества.			

### 21.11.11. Текстолит электротехнический листовой (ГОСТ 2910-74, ТУ 05758799-014-96)

Текстолит представляет собой слоистый прессованный материал, состоящий из двух или более слоев хлопчатобумажной ткани или ткани из синтетического волокна. Для текстолита марок А, Б, Г и ВЧ ткани пропитывают термореактивной фенолформальдегидной или анилинфенолформальдегидной смолой резольного типа; для текстолита ЛТ — эпоксидной смолой, отверждаемой смолой резольного типа.

Листы текстолита выпускаются шириной от 450 до 900 мм, длиной от 600 до 1480 мм. Толщина листов: 0,6...0,9 (через 0,1 мм) 1,0; 1,2; 1,4; 1,5; 1,6; 1,8; 2,0; 2,2; 2,5; 2,8; 3; 3,6; 3,8; 4,0; 4,3; 4,5; 5; 5,5; 6; 6,5; 7; 7,5; 8; 8,6; 9; 9,5; 10; 10,5; 11; 11,5; 12; 12,5; 13; 13,5; 14; 14,6; 15; 16; 17; 18; 19; 20; 21; 22; 24; 25; 26; 28; 30; 32; 33; 35; 36; 38; 40; 42; 46; 48; 50. В настоящее время выпускаются листы толщиной до 100 мм.

Физико-механические свойства текстолита приведены в табл. 21.68, а электрические свойства — в табл. 21.69.

Таблица 21.68  
Физико-механические свойства текстолита

Показатель	Марка				
	А	Б	Г	ВЧ	ЛТ
Плотность, г/см <sup>3</sup>	1,3... 1,45	1,3... 1,45	1,3... 1,45	1,3... 1,45	1,25... 1,35
Разрушающее напряжение, МПа, при статическом изгибе перпендикулярно слоям для листов толщиной 10 мм:					
по основе ткани	88,2	107,8	88,2	—	117,0
по утку ткани	78,5	88,2	78,5	—	107,8

Показатель	Марка				
	А	Б	Г	ВЧ	ЛТ
при растяжении для листов толщиной 1 мм и более:					
по основе ткани	49	54	49	88,2	98
по утку ткани	33,4	44	34,3	44	49
Ударная вязкость перпендикулярно слоям, кДж/м <sup>2</sup> :					
для листов толщиной от 1,2 до 5 мм:					
по основе ткани	11,8	14,7	11,8		24,6
по утку ткани	9,8	12,7	9,8		19,6
для листов толщиной 5,0 до 9,5 мм:					
по основе ткани	16,7	19,6	16,7	—	—
по утку ткани	14,7	16,7	14,7	—	—
для листов толщиной свыше 9,5 мм:					
по основе ткани	27,4	31,4	27,4	—	—
по утку ткани	21,6	24,5	21,6	—	—
Сопротивление раскалыванию (листы толщиной 10 мм и более), кН/м	2250	2350	2250	—	—
Теплостойкость по Мартенсу для листов толщиной 10 мм и более, °С	135	135	135	—	—
Маслостойкость в трансформаторном масле в течение 4 ч при температуре, °С, не менее	130	—	130	—	130
Водопоглощение после выдержки 24 ч в дистиллированной воде, %, не более, для листов толщиной, мм:					
до 1	9	9	9	7,5	0,9
свыше 1 до 2	6	6	6	6	0,8
свыше 2 до 5	4,5	4,5	4,5	4,5	0,45
свыше 5 до 10	3	3	3	3	—
свыше 10	2	2	2	—	—

Таблица 21.69

Электрические свойства текстолита

Показатель	Марки				
	А	Б	Г	ВЧ	ЛТ
Удельное поверхностное электрическое сопротивление, Ом:					
в исходном состоянии для листов толщиной, мм:					
до 3	10 <sup>11</sup>	10 <sup>10</sup>	10 <sup>11</sup>	10 <sup>11</sup>	10 <sup>13</sup>
свыше 3	10 <sup>10</sup>	10 <sup>10</sup>	10 <sup>10</sup>	10 <sup>11</sup>	—
после пребывания 24 ч при 20 °С в среде с относительной влажностью 95% для листов толщиной, мм:					
до 3	10 <sup>8</sup>	10 <sup>8</sup>	10 <sup>8</sup>	10 <sup>9</sup>	—
свыше 3	10 <sup>8</sup>	10 <sup>8</sup>	10 <sup>8</sup>	10 <sup>8</sup>	—
Удельное объемное электрическое сопротивление, Ом·мм, не менее:					
в исходном состоянии	10 <sup>8</sup>	10 <sup>8</sup>	10 <sup>8</sup>	10 <sup>8</sup>	10 <sup>11</sup>
после пребывания 24 ч при 20°С в среде с относительной влажностью 95% для листов толщиной, мм:					
от 0,8 до 3	10 <sup>6</sup>	10 <sup>6</sup>	10 <sup>6</sup>	10 <sup>7</sup>	—
свыше 3	10 <sup>6</sup>	10 <sup>6</sup>	10 <sup>6</sup>	10 <sup>6</sup>	—
Внутреннее электрическое сопротивление для листов толщиной 8 мм и более, Ом:					
в исходном состоянии	10 <sup>10</sup>	10 <sup>9</sup>	10 <sup>10</sup>	—	—
после пребывания в течение 24 ч при 20 °С в среде с относительной влажностью 95%	10 <sup>7</sup>	10 <sup>7</sup>	10 <sup>7</sup>	—	—
Тангенс угла диэлектрических потерь при 10 <sup>6</sup> Гц в исходном состоянии, не более	—	—	—	0,07	—
Пробивное напряжение параллельно слоям при расстоянии между электродами 8 мм (листов толщиной от 8 мм и более) при 50 Гц и 90 °С в трансформаторном масле, кВ	10	8	10	10	—
Электрическая прочность перпендикулярно слоям (для листов толщиной до 8 мм) при 50 Гц и 90 °С в трансформаторном масле, МВ/м, не менее, для листов толщиной, мм:					
0,8	6	4,5	6	6	—
от 0,8 до 1,0	8	6	8	8	28
от 1,0 до 2,0	6	4	6	8	20
от 2,0 до 3,0	5	3	5	5	17

**21.11.12. Стеклотекстолит электротехнический листовой**  
**(ГОСТ 12652-74, ТУ 057587799-97,**  
**ТУ 05758799-077-2002)**

Стеклотекстолит представляет собой слоистый прессованный материал, состоящий из двух или более слоев стеклянной ткани, пропитанной термореактивной смолой. Применяют смолы: фенолформальдегидную резольного типа, эпоксидную и кремнийорганическую.

Стеклотекстолит выпускают в листах шириной от 450 до 1000 мм и длиной от 600 до 1480 и до 2000 мм. Толщина листов стеклотекстолита: 0,35; 0,5; 0,6; 0,8; 1; 1,2; 1,4; 1,5; 1,6; 1,8; 2; 2,3; 2,6; 2,8; 3; 3,5; 4; 4,5; 5; 5,5; 6; 6,5; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15; 16; 18; 20; 22; 25; 28; 30; 35; 40; 50. В настоящее время выпускаются листы толщиной до 100 мм (марка СТЭФ-У)

Марки и назначение некоторых стеклотекстолитов приведены в табл. 21.70, физико-механические свойства — в табл. 21.71, а их электрические свойства — в табл. 21.72.

**Таблица 21.70**  
**Марки и назначение стеклотекстолита**

Марка	Характерные свойства и преимущественное назначение	Допустимые рабочие температуры, °С
СТ	Для работы при напряжении до 1000 В, 50 Гц на воздухе в условиях относительной влажности 45...75% при 15...35 °С	–65...+130
СТ-Б	То же, но с расширенными допусками по толщине и ненормированным короблением	–65 ...+130
СТ-I	То же, но с более однородной мелкой внутренней и поверхностной структурой	–65...+130
СТ-II	Для работы при напряжении до 1000 В и 50 Гц на воздухе в условиях относительной влажности 45...75% и 15...35 °С; с повышенной жесткостью при рабочих температурах	–65...+155
СТЭФ СТЭФ-Т	Для работы при напряжении свыше 1000 В и 50 Гц на воздухе в условиях относительной влажности 45...75% и 15...35 °С, а также для работы при напряжении до 1000 В и 50 Гц в условиях относительной влажности 95% и 35 °С	–65...+155
СТЭФ-1	То же, но с более однородной мелкой внутренней и поверхностной структурой	–65...+155
СТК	То же, что и СТЭФ	–65...+180

Марка	Характерные свойства и преимущественное назначение	Допустимые рабочие температуры, °С
СТ-ЭТФ	То же, что и СТЭФ, отличается повышенной нагревостойкостью	-65...+180
СТВК	Для работы при напряжении до 1000 В и 50 Гц на воздухе в условиях относительной влажности 95±2% при 35 °С	-65...+180
СТЭФ-У	Для работы при напряжении свыше 1000 В и 50 Гц на воздухе а условиях относительной влажности 45...75% и 15...35 °С, в также для работы при напряжении до 1000 В и 50 Гц в условиях относительной влажности 95% и 40 °С	-65...+155
СТЭФ-П	Полупроводящий материал для уплотнения статорных обмоток гидрогенераторов	-65...+155
СТЭФ-ПВ (волнистый)	Полупроводящий материал для уплотнения обмоток в пазах высоковольтных электрических машин	-65...+155
СТКМ СТКМ-С	Для изготовления электроизоляционных деталей для длительной работы при температуре до 200 °С и кратковременной (50 ч) до 250 °С	-65...+200
СТК/ЭП	Для электрических машин и аппаратов нагревостойкого и тропического исполнения для длительной работы при температуре 180 °С	-65...+180
СТЭФ-Р СТЭФ-РЭ	Для изоляции обмоток роторов турбогенераторов для длительной работы при температуре 155 °С	-65...+155

Таблица 21.71

## Физико-механические свойства стеклотекстолита

Показатель	СТ, СТ-Б	СТ-1	СТ-П	СТЭФ	СТЭФ-1	СТЭФ-Т	СТК	СТВК
Плотность, г/см <sup>3</sup>	1,6... 1,85	1,6... 1,85	1,6... 1,9	1,6... 1,9	1,6... 1,9	1,6... 1,9	1,6... 1,8	1,6... 1,8
Разрушающее напряжение при статическом изгибе перпендикулярно слоям для листов толщиной 10 мм и более, МПа, не менее:								
по основе ткани	122,5	127,4	—	314	353	—	—	127,4
по утку ткани	93	98	—	274	294	—	—	98

Продолжение табл. 21.71

Показатель	СТ, СТ-Б	СТ-1	СТ-П	СТЭФ	СТЭФ-1	СТЭФ-Т	СТК	СТВК
Разрушающее напряжение при растяжении для листов толщиной 1 мм и более, МПа, не менее;								
по основе ткани	88,2	93	127,4	294	314	180	107,8	98
по утку ткани	68,6	73,5	107,8	196	215,6	—	88,2	78,4
Ударная вязкость перпендикулярно слоям, кДж/м <sup>2</sup> , для листов толщиной								
от 1,2 до 9,5 мм:								
по основе ткани	14,7	19,6	24,5	59	63,5	—	—	—
по утку ткани	11,8	14,7	14,7	49	54	—	—	—
свыше 9,5 мм:								
по основе ткани	49	54	—	215,6	235	—	—	—
по утку ткани	39	44	—	196	205,8	—	53	68,5
Сопротивление раскалыванию (для листов толщиной 10 мм и более), кН/м, не менее	83	83	—	166,6	166,6	—	—	—
Водопоглощение при температуре 20 °С после 24 ч пребывания в дистиллированной воде, %, для толщины листа, мм:								
от 0,36 до 1	—	4,5	4,0	—	1,0	—	2,0	0,7
свыше 1 до 2,5	3,5	3,5	3,0	0,8	0,8	—	2,0	0,6
свыше 2,5 до 6	3,0	3,0	2,5	0,8	0,8	—	2,0	0,5
свыше 6 до 10	2,5	2,5	—	0,8	0,8	—	1,8	0,8
свыше 10	2,0	2,0	—	0,8	0,8	—	1,8	0,3
Теплостойкость по Мартенсу (для листов толщиной 10 мм и более), °С	185	185	—	185	185	—	250	250

Показатель	СТ, СТ-Б	СТ-1	СТ-П	СТЭФ	СТЭФ-1	СТЭФ-Т	СТК	СТВК
Стойкость к кратковременному нагреванию, °С	150	150	200	200	200	—	250	280
Маслостойкость в трансформаторном масле в течение 4 ч при температуре, °С, не менее	130	130	—	130	130	—	—	—

Таблица 21.72  
Электрические свойства стеклотекстолита

Показатель	СТ; СТ-Б	СТ-I	СТ-II	СТЭФ	СТЭФ-1	СТЭФ-Т	СТК	СТВК
Удельное объемное электрическое сопротивление, Ом·м, для листов толщиной до 8 мм:								
в исходном состоянии	$5 \cdot 10^8$	$5 \cdot 10^8$	$10^{10}$	$10^{11}$	$10^{11}$	—	$10^{10}$	$10^{10}$
после пребывания 24 ч при 20 °С	$10^8$	$10^8$	$10^9$	$10^{10}$	$10^{10}$	—	$10^8$	—
в среде с относительной влажностью 95%								
при 150 °С	—	—	—	$10^7$	—	$10^{10}$	—	—
при 180 °С	—	—	—	—	—	—	$10^{10}$	$10^{10}$
Внутреннее электрическое сопротивление для листов толщиной 8 мм и более, Ом:								
в исходном состоянии	$10^9$	$10^9$	—	$10^{10}$	$10^{10}$	—	$10^{10}$	$10^{10}$
после пребывания 24 ч при 20 °С	$10^8$	$10^8$	—	$10^9$	$10^9$	—	—	—
в среде с относительной влажностью 95%								

Показатель	СТ; СТ-Б	СТ-I	СТ-II	СТЭФ	СТЭФ-1	СТЭФ-Т	СТК	СТВК
Электрическая прочность перпендикулярная слоям (листы толщиной до 8 мм) при испытании в трансформаторном масле при 90 °С при переменном напряжении 50 Гц, МВ/м, не менее, для толщины образца, мм:								
до 1 включительно	—	12	16	—	27	—	14	14
свыше 1 до 2	9	9	13	20	22	—	12	12
свыше 2 до 3	7	7	12	20	20	—	8	8
Пробивное напряжение параллельно слоям для листов толщиной 8 мм и более в трансформаторном масле при 90±2 °С при переменном напряжении, 50 Гц, кВ, не менее	12	12	—	30	30	—	20	20
Тангенс угла диэлектрических потерь при 50 Гц, не более								
в исходном состоянии	—	—	—	0,03	0,03	0,05	—	0,07
при 180±2 °С	—	—	—	—	—	—	0,2	—

### 21.11.13. Стеклотекстолит фольгированный (ГОСТ 10316-78)

Фольгированный стеклотекстолит — слоистый прессованный пластик, состоящий из стеклоткани, пропитанной термореактивными связующими, и облицованный с одной или с двух сторон медной электролитической фольгой.

Фольгированный стеклотекстолит применяется для изготовления печатных плат. Выпускаются марки: СФ-1-35, СФ-1-35Г, СФ-2-35, СФ-2-35Г, СФ-1-50, СФ-1-50Г, СФ-2-50, СФ-2-50Г, СФ-1Н-50, СФ-1Н-50Г, СФ-1-35, СФ-1Н-35Г, СФ-2Н-35, СФ-2Н-35Г, СФ-2Н-50, СФ-2Н-50Г. Буквы и цифры в марках означают: С — стеклотекстолит; Ф — фольгированный; Г (на последнем месте) — облицованный гальваностойкой фольгой; Н — нагревостойкий; 1 — облицованный фольгой с одной стороны; 2 — облицованный фольгой с двух сторон; 35 и 50 — толщина фольги (0,035 и 0,050 мм).

Фольгированный стеклотекстолит выпускается в листах: толщиной до 1 мм включительно — не менее 400х600 мм и толщиной 1,5 мм и более — не менее 600х700 мм. Толщина листов: 0,5; 0,8; 1,0; 1,5; 2,0; 2,5; 3,0 мм. Свойства фольгированного стеклотекстолита приведены в табл. 21.73.

Таблица 21.73

Свойства фольгированного стеклотекстолита

Показатель	СФ-1-35 СФ-2-35 СФ-1-50 СФ-2-50	СФ-1-35Г СФ-2-35Г СФ-1-50Г СФ-2-50Г	СФ-1Н-35 СФ-2Н-35 СФ-1Н-50 СФ-2Н-50	СФ-1Н-35Г СФ-2Н-35Г СФ-1Н-50Г СФ-2Н-50Г
Прочность на отслаивание (на ширину полоски 3 мм), Н, не менее:				
в исходном состоянии	3,0	3,0	4,2	4,2
после кондиционирования в парах трихлорэтилена в течение 2 мин при 88...90 °С	3,0	3,0	4,2	4,2
после кондиционирования 20 мин в гальванических растворах при 70 °С	—	2,6	—	3,3
после воздействия теплового удара 10 с при 260 °С	3,0	3,0	4,2	4,2
Прочность на отрыв контактной площадки после воздействия в условиях кондиционирования при 270 °С в течение 8 с, Н, не менее	60	60	60	60
Водопоглощение после кондиционирования в течение 24 ч при 23 °С, %, при толщине, мм:				
от 0,5 до 0,8	1,5	1,5	1,6	1,8
свыше 0,8 до 1,5	1,5	1,5	1,5	1,5
свыше 1,5 до 3	1,2	1,2	1,2	1,2

Показатель	СФ- 1-35	СФ- 1-35Г	СФ- 1Н-35	СФ- 1Н-35Г
	СФ- 2-35	СФ- 2-35Г	СФ- 2Н-35	СФ- 2Н-35Г
	СФ- 1-50	СФ- 1-50Г	СФ- 1Н-50	СФ- 1Н-50Г
	СФ- 2-50	СФ- 2-50Г	СФ- 2Н-50	СФ- 2Н-50Г
Удельное объемное электрическое сопротивление после кондиционирования в течение 96 ч при 40 °С и относительной влажности воздуха 93±2%, Ом·м, не менее	5·10 <sup>8</sup>	5·10 <sup>8</sup>	5·10 <sup>8</sup>	5·10 <sup>8</sup>
Тангенс угла диэлектрических потерь при 10 <sup>6</sup> Гц после кондиционирования в течение 96 ч при 40 °С и относительной влажности воздуха 93±2%, не более	0,04	0,04	0,055	0,055

#### 21.11.14. Пленки пластмассовые электроизоляционные

Электроизоляционные пленки получают из различных полимеров. Пленки представляют собой тонкие гибкие материалы, обладающие малой гигроскопичностью, довольно высокой механической прочностью и высокими электроизоляционными свойствами, а некоторые — высокой нагревостойкостью.

*Пленка полистирольная* (ГОСТ 12998-73). Пленка электро-технического назначения выпускается двух марок и сортов: ППС-А 1-го и 2-го сортов — для конденсаторов, работающих при температуре от -60 до +85 °С; ППС-Б 1-го и 2-го сортов — для изоляции электрических кабелей, работающих при температуре от -50 до +70 °С. Толщина пленки: 0,02; 0,03; 0,04; 0,05; 0,06 и 0,1 мм. Пленка по виду прозрачная и неокрашенная.

Физико-механические и электрические свойства пленки приведены в табл. 21.74.

Таблица 21.74

Физико-механические и электрические свойства полистирольной пленки

Показатель	ППС-А		ППС-Б	
	1-й сорт	2-й сорт	1-й сорт	2-й сорт
Разрушающее напряжение при растяжении, МПа, для пленки толщиной, мм:				
0,045...0,05	58,8	58,8	67,6	65,7
0,06...0,1	58,8	58,8	58,8	54,0

Показатель	ППС-А		ППС-Б	
	1-й сорт	2-й сорт	1-й сорт	2-й сорт
Относительное удлинение при разрыве, %, не менее	3,1	3,1	3,1...15	3,0...15
Электрическая прочность, МВ/мм: при переменном напряжении 50 Гц, не менее, для пленки толщиной, мм:				
0,02	190	170	—	—
0,03...0,06	130	110	110	110
0,1	130	110	100	100
при постоянном напряжении для пленки толщиной 0,02 мм, не менее	300	280	—	—
Удельное объемное электрическое сопротивление, Ом·м, не менее	10	10	10	10
Тангенс угла диэлектрических потерь при $10^6$ Гц, не более	0,0003	0,0004	0,0004	0,0004
Относительная диэлектрическая проницаемость при $10^3$ Гц	2,3...2,6	2,1...2,6	2,1...2,6	2,1...2,6

Пленка поливинилхлоридная для защиты кабельных оболочек. Толщина пленки 0,23 мм, ширина 640 или 1200 мм. Диапазон рабочих температур от  $-25$  до  $+50$  °С.

Пленка полиэтилентерефталатная электроизоляционная марки ПТЭФ. Применяется как изоляционный материал обмоток и узлов электрических машин и аппаратов, при изготовлении проводов и кабелей. Диапазон рабочих температур от  $-60$  до  $+155$  °С. Толщина пленки: 8, 10, 12, 15, 20, 25, 35, 40, 50, 70, 100, 125, 190, 250 мкм. Ширина пленки от 6 мм до 1500 мм.

Физико-механические и электрические свойства полиэтилентерефталатной пленки приведены в табл. 21.75.

Таблица 21.75  
Физико-механические и электрические свойства  
полиэтилентерефталатной пленки

Показатель	Высший сорт	Первый сорт
Разрушающее напряжение при растяжении, МПа, не менее,		
для толщины, мкм:		
до 30	171,5	132,3
свыше 30 до 175	176,4	147
190 и 250	156,8	137,2

Показатель	Высший сорт	Первый сорт
Относительное удлинение при растяжении, %, не менее,		
для толщины, мкм:		
до 40	70	60
50...70	80	70
100...250	100	90
Сопротивление надрыву, Н,		
для толщины, мкм:		
40	—	—
50	200	180
79...199	280	250
125	380	350
190	700	700
250	800	800
Электрическая прочность, МВ/м, не менее,		
для толщины, мкм:		
до 30	180	160
свыше 30 до 50	140	140
свыше 50 до 125	120	100
190	90	99
250	80	80
при 155 °С для толщины до 30	50	50
Удельное объемное электрическое сопротивление, Ом·м, не менее:		
при комнатной температуре	10 <sup>14</sup>	10 <sup>14</sup>
при 155 °С для толщины, мкм:		
до 50	10 <sup>11</sup>	10 <sup>10</sup>
свыше 60	Не определяется	
Тангенс угла диэлектрических потерь при 10 <sup>6</sup> Гц для пленки толщиной до 30 мкм, не более	0,005	0,007

Пленка и лента из фторопласта-4 (ГОСТ 24222-80). Пленку и ленту получают из заготовок фторопласта-4. Пленки и ленты стойки к воздействию всех сред, за исключением фтора, трехфтористого хлора и растворов щелочных металлов. Диапазон рабочих температур — от -269 до +260 °С. Марки пленок: КО — конденсаторная ориентированная для изготовления конденсаторов; ЭО — электроизоляционная ориентированная; ЭН — электроизоляционная неориентированная; ИО — изоляционная ориентированная; ИН — изоляционная неориентированная.

Марка ленты ПН — лента прокладочная неориентированная.

Пленки марок ЭО и ЭН применяются для изолирования проводов и кабелей. Пленки марок ИО и ИН применяются для межслойной электрической изоляции в аппаратах и деталях.

Лента марки ПН служит для изготовления прокладочного, уплотнительного и изоляционного материалов.

Толщины пленок: КО 0,005...0,04 мм; ЭО 0,01 — 0,1 мм; ЭН 0,02...0,15 мм; ИН 0,06...0,2. Ширина — от 10 до 120 мм.

Толщина ленты ПН: 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 1,0; 1,2; 1,4; 1,6; 1,8; 2,0; 2,2; 2,4; 2,6; 2,8; 3,0 мм. Ширина от 40 до 100 мм.

Свойства пленки и ленты из фторопласта-4 приведены в табл. 21.76.

Таблица 21.76

Свойства пленки и ленты из фторопласта-4

Показатель	КО	ЭО	ЭН	ИО	ИН	ПН
Разрушающее напряжение при растяжении в продольном направлении, МПа, не менее	42,1	50,1	15,6	42,1	12,7	18,6
Удельное объемное электрическое сопротивление, Ом·м, не менее	$8 \cdot 10^{15}$	$10^{15}$	$10^{15}$	—	—	$10^{14}$
Тангенс угла диэлектрических потерь при частоте $10^6$ Гц	0,00025	0,0003	0,0003	—	—	—
Электрическая прочность при постоянном напряжении, МВ/м	225	160	60	65	46	60

*Пленка и лента полиимидная ПМ* (ТУ 6-19-121-79, ТУ 3491-099-05758799-2003). Пленка предназначена для длительной работы при температуре от  $-60$  до  $+220$  °С, кратковременной при  $300$  °С, а также при температуре окружающей среды до  $40$  °С и относительной влажности 90%. Выпускается пленка двух марок: А и Б. Толщина пленки: 30, 40, 50 и 60 мкм. Ширина пленки от 10 мм; от 20 до 1200 мм. Лента выпускается марок ЛПМК-Т и ЛПМК-ТТ толщиной 0,1...0,15 мм. Рабочая температура ленты от  $-60$  до  $230$  °С. Используется для корпусной изоляции электрических машин и аппаратов.

Физико-механические и электрические свойства полиимидной пленки приведены в табл. 21.77.

Таблица 21.77

Физико-механические и электрические свойства полиимидной пленки

Показатель	Марка	
	А	Б
Разрушающее напряжение при растяжении, МПа, не менее:		
в продольном направлении:		
среднее	117	98
минимальное	98	—
в поперечном направлении:		
среднее	108	—
минимальное	88	—
Удельное объемное электрическое сопротивление, Ом·м:		
при 15...35 °С	10 <sup>14</sup>	10 <sup>13</sup>
при 250 °С	10 <sup>11</sup>	10 <sup>10</sup>
при 15...35 °С	10 <sup>13</sup>	10 <sup>12</sup>
после 24 ч в атмосфере относительной влажности 95% при 20 °С		
Электрическая прочность, МВ/м, не менее:		
в исходном состоянии:		
средняя	180	160
минимальная	100	60
после 24 ч в атмосфере относительной влажности 98% при 20 °С, не менее:		
средняя	140	80
минимальная	80	40

## 22. ФАРФОРОВЫЕ, СТЕКЛЯННЫЕ И ПОЛИМЕРНЫЕ ИЗОЛЯТОРЫ

### 22.1. Общие сведения

Изолятор — это устройство, предназначенное для электрической изоляции и механического крепления электрооборудования и проводов, находящихся под разными электрическим потенциалами (СТ МЭК 50 (417)-84) [9].

Изоляторы разделяют на изоляторы низкого напряжения, работающие при напряжениях до 1000 В включительно, и изоляторы высокого напряжения, работающие при номинальных напряжениях свыше 1000 В.

По признаку изолирующего материала различают изоляторы фарфоровые и стеклянные. В последние годы все шире применяются полимерные изоляторы на основе кремнийорганических композиций, расположенных на стержне из стеклопластика.

*Керамические материалы.* Керамические материалы находят широкое применение в качестве изоляторов. *Изоляторный фарфор* относится к керамическим низкочастотным материалам. Его получают путем обжига специальной глины, кварцевого песка и щелочного полевого шпата. Другие разновидности фарфора (по степени улучшения их электрических свойств): *радиофарфор* и *ультрафарфор*. Последний является высокочастотным диэлектриком с малыми диэлектрическими потерями и высокой механической прочностью. Получают ультрафарфор на основе *корунда* (высокотемпературной  $\alpha$ -модификации окиси алюминия).

Керамика на основе окиси бериллия, отличающаяся высокой теплопроводностью (в 200—250 раз выше, чем у стекла), называется *брокеритом*. Ее используют в качестве подложки для интегральных микросхем, а также в особо мощных СВЧ установках.

Для изготовления высокостабильных изоляторов и высокочастотных конденсаторов используют *цельзиановую* керамику, которая обладает повышенной электрической прочностью (до 45 МВ/м), низким температурным коэффициентом линейного расширения.

Для изготовления мелких деталей для высокочастотных цепей используют *стеатитовую* керамику, получаемую на основе минерала талька. Для тех же целей, а также для изготовления изоляторов электровакуумных и полупроводниковых приборов используется *форстеритовая* керамика.

Для производства низкочастотных и высокочастотных конденсаторов используют конденсаторную керамику: *тиконды*, *лантановую* и *станнатную* керамику.

Основные характеристики некоторых изоляторных керамических материалов приведены в табл. 22.1.

Таблица 22.1

Свойства изоляторных электрических материалов

Основные показатели	Электро-технический фарфор	Стеатит	Кордиерит	Цельзиан	Пористые алюмосиликаты магния	Корундовые
Плотность, $10^3 \text{ кг/м}^3$	2,45...2,7	2,8	—	—	2,1...2,2	3,5...3,9
Прочность на изгиб, МПа, не менее	30...140	90...120	50	70	15...40	200...300
Прочность на растяжение, МПа, не менее	30...60	45	25	25	—	—
Прочность на сжатие, МПа, не менее	—	500...600	300	—	—	—
Ударная прочность, $\text{кДж/м}^2$ , не менее	1,3...2,5	2,2...2,5	1,8	2,0	0,8...1,4	3,8...4,0
Модуль упругости, $10^3$ , МПа, не менее	60...100	60...80	90	—	40	200...300
Коэффициент термического линейного расширения при 20...100 °С, $10^{-6} \text{ К}^{-1}$	3...8	5...9	0,5...2,0	3...5	3...5	4,5...7
Удельная теплоемкость, $\text{Дж/(кг·К)}$ , при 20...100 °С	800...900	800...900	800...1200	800...1000	750...900	850...1050

Основные показатели	Электро-технический фарфор	Стеатит	Кордиерит	Цельзиан	Пористые алюмосиликаты магния	Корундовые
Коэффициент теплопроводности при 20...100 °С, Вт/(м·К)	1...3	1...3	1,5...2,5	1,5...2,5	1...2	10...30
Стойкость к термоударам, К	150...160	80...100	250	200	150...350	140...180
Электрическая прочность, кВ/мм, при 50 Гц, не менее	20...30	20	10	20	—	10...17
Относительная диэлектрическая проницаемость при 50 Гц	5,0...7,5	5,0...7,0	4,0...6,0	—	—	7...10
Тангенс угла диэлектрических потерь при 50 Гц	0,025	0,005...0,025	0,025	0,010	—	0,0002...0,001
Удельное объемное сопротивление при постоянном токе, Ом·см	10 <sup>11</sup> ...10 <sup>13</sup> при 20 °С, 10 <sup>4</sup> при 600 °С	10 <sup>13</sup> при 20 °С, 10 <sup>4</sup> при 600 °С	10 <sup>8</sup> при 200 °С, 10 <sup>4</sup> при 600 °С	10 <sup>14</sup> при 200 °С, 10 <sup>9</sup> при 600 °С	10 <sup>9</sup> ...10 <sup>10</sup> при 200 °С, 10 <sup>5</sup> при 600 °С	10 <sup>14</sup> при 20 °С, 10 <sup>6</sup> ...10 <sup>8</sup> при 600 °С
Удельное поверхностное сопротивление, Ом	10 <sup>10</sup>	10 <sup>10</sup>	10 <sup>10</sup>	10 <sup>12</sup>	—	—

## 22.2. Изоляторы фарфоровые и стеклянные низковольтные

*Изоляторы фарфоровые штыревые* (ТУ 16.528.040-75) изготавливают из изоляторного фарфора, предназначены для изоляции и крепления проводов на воздушных линиях электропередачи (ЛЭП) при номинальном постоянном напряжении до 440

и переменном 660 В частотой 50 Гц. Типы изоляторов: ТФ-12Л.У1, ТФ-16Л.У1, РФ-10Л.У1, РФО-12Л.У1 и РФО-16Л.У1. Расшифровка обозначений: Т — телефонный; Ф — фарфоровый; Р — радиотрансляционный; О — ответственный; 10, 12, 16 — диаметры крюка или штыря, на которых крепятся изоляторы, мм; Л — линейный; У — климатическое исполнение; 1 — категория размещения (на открытом воздухе). Срок службы изоляторов не менее 20 лет.

Основные технические данные приведены в табл. 22.2.

Таблица 22.2

Изоляторы штыревые фарфоровые низковольтные

Тип	Высота, мм	Диаметр, мм	Масса 1 шт., кг	Сопротивление изоляции, МОм	Механическая прочность, кН
ТФ-12 Л.У1	67	49	0,165	20000	3
ТФ-16 Л.У1	86	61	0,315	40000	6
ТФ-20 Л.У1	100	70	0,47	50000	8
РФ-10 Л.У1	47	40	0,075	10000	2
РФО-12 Л.У1	70	56	0,205	20000	3
РФО-16 Л.У1	87	61	0,285	40000	6

*Изоляторы стеклянные низковольтные.* Стеклянные изоляторы (ГОСТ 9648-80) предназначены для электрической изоляции и крепления проводов на ЛЭП при номинальном до 1000 В при переменном или постоянном напряжениях. Изоляторы устанавливаются на штыри или крюки. Изготавливаются двух типов: НС-16 и НС-18. Буквы обозначают: Н — изолятор низковольтный; С — стеклянный. Цифры — диаметр крюка или штыря. Изоляторы выдерживают 1 мин при 95% влажности воздуха и 20 °С испытательное напряжения 3500 В, 50 Гц.

Основные технические данные стеклянных изоляторов приведены в табл. 22.3.

Таблица 22.3

Изоляторы стеклянные для низковольтных ЛЭП

Тип изолятора	Масса, кг	Высота, мм	Диаметр, мм	Диаметр резьбовой части (max/min), мм	Электрическое сопротивление, МОм	Разрушающее усилие на срез головки изолятора, кН
НС-16	0,32	86	70	20/18	4000	6
НС-18	0,53	108	80	22/20	5000	8

## 22.3. Изоляторы высоковольтные фарфоровые и стеклянные штыревые

*Фарфоровые высоковольтные линейные штыревые изоляторы* марок ШФ предназначены для изоляции и крепления проводов на воздушных ЛЭП и в распределительных устройствах (РУ) электростанций и подстанций переменного напряжения до 35 кВ включительно частотой 100 Гц в диапазоне температуры от +50 до -60 °С. Класс изолятора соответствует номинальному напряжению. Изоляторы имеют несколько конструктивных исполнений. В обозначении изоляторов буквы и цифры означают: Ш — штыревой; Ф — фарфоровый; 10, 20, 35 — классы изоляторов, соответствующие значениям номинальных напряжений линии электропередачи; А, Б, В, Г — исполнения изолятора (табл. 22.4).

Таблица 22.4

Изоляторы фарфоровые линейные штыревые высоковольтные

Тип изолятора	Масса, кг	Напряжение, кВ					Разрушающая сила на изгиб, кН	Длина пути утечки, мм
		номинальное	импульсное	пробивное	выдержанное в сухом помещении	выдержанное под дождем		
ШФ10-Г	1,9	10	95	140	63	36	13	265
ШФ20-В	3,9	20	125	180	82	57	13	385
ШФ35-Б	11,0	35	195	210	120	85	16	700

*Стеклянные высоковольтные линейные штыревые изоляторы* выпускаются марки ШС и служат для изоляции и крепления проводов на деревянных и железобетонных опорах воздушных ЛЭП переменного напряжения до 10 кВ включительно, при частоте до 100 Гц, при температурах от +50 до -60 °С. В обозначении указываются: Ш — штыревой; С — стеклянный; 10 — класс изолятора, соответствующий номинальному напряжению, кВ; А, Г — исполнения (табл. 22.5). Средний срок службы изоляторов 30 лет.

Таблица 22.5

Изоляторы стеклянные высоковольтные линейные штыревые

Тип изолятора	Напряжение, кВ					Разрушающая сила на изгиб, кН	Длина пути утеч- ки, мм	Мас- са, кг
	номи- наль- ное	про- бив- ное	им- пульс- ное	выдерживаемое				
				в сухом со- стоянии	под до- ждем			
ШС10-А	10	100	90	55	30	14	210	1,4
ШС10-Г	10	130	80	55	35	12,5	265	2,2

## 22.4. Изоляторы подвесные фарфоровые и стеклянные

*Изоляторы подвесные фарфоровые* предназначены для изоляции и крепления проводов и грозозащитных тросов на воздушных ЛЭП и РУ электрических станций и подстанций переменного напряжения более 1 кВ при частоте до 100 Гц и температуре от +50 до -60 °С. Для использования в высоковольтных ЛЭП изоляторы собираются в гирлянды. Марки изоляторов и их технические данные приведены в табл. 22.6.

Таблица 22.6  
Изоляторы подвесные фарфоровые

Тип изолятора	Напряжение, кВ				Электроме- ханическая разрушаю- щая нагруз- ка, кН	Механиче- ская испыта- тельная од- номинутная нагрузка, кН	Длина пути утеч- ки, мм	Мас- са, кг
	выдержи- ваемое под дож- дем	импульсное		пробив- ное				
		+	-					
ПФ70-В	32	100	110	130	70	35	355	5,0
ПФГ70-Б	40	115	110	130	70	30	375	4,8
ПФ200-А	44	115	120	140	200	100	420	12,85
ПФ160-А	40	105	105	135	160	80	385	9,0

Смысл букв и цифр в обозначении изолятора: П — подвесной, Ф — фарфоровый, Г — грязестойкий; цифры определяют класс изолятора по нормированному значению разрушающей электро-механической нагрузки; А, Б и В — исполнения изолятора.

*Изоляторы подвесные стеклянные* также предназначены для изоляции и крепления проводов и грозозащитных тросов на воздушных ЛЭП и РУ электрических станций и подстанций переменного напряжения более 1 кВ при частоте до 100 Гц и температуре от +50 до -60 °С (табл. 22.7).

Таблица 22.7  
Изоляторы подвесные стеклянные

Тип изолятора	Напряжение, кВ				Электро- механиче- ская раз- рушающая нагрузка, кН	Механичес- кая испыта- тельная од- номинутная нагрузка, кН	Длина пути утечки, мм	Масса, кг
	выдер- живае- мое под дождем	импульсное		пробив- ное				
		+	-					
ПС70 Д	30	90	100	130	70	30	290	3,7
ПС160-Б	37	93	105	130	160	80	390	8,0

Тип изолятора	Напряжение, кВ				Электро- механиче- ская раз- рушающая нагрузка, кН	Механичес- кая испыта- тельная од- номинутная нагрузка, кН	Длина пути утечи, мм	Масса, кг
	выдер- живае- мое под дождем	импульсное		пробив- ное				
		+	–					
ПС120-А	48	110	115	130	120	60	325	5,7
ПС210-Б	42	110	115	130	210	105	375	8,5
ПС300-В	46	120	115	130	300	150	418	11,8
ПСГ70-А	40	120	120	130	70	35	400	5,2
ПСГ120-А	48	110	110	130	120	60	423	7,3

## 22.5. Изоляторы опорные фарфоровые

Опорные изоляторы предназначены для изоляции и крепления токоведущих частей в РУ электрических станций и подстанций в помещениях и на открытом воздухе при температурах от +50 до –60°C. В конструктивном отношении различают *армированные опорные, опорно-штыревые и опорные стержневые* изоляторы. По отношению к окружающей среде различают опорные изоляторы внутренней и внешней установки.

*Изоляторы опорные для внутренней установки* различаются по величине номинального напряжения (3, 6, 10, 20, 24, 35 кВ), по величине разрушающей нагрузки на изгиб, по климатическим условиям и категории размещения, по форме нижнего основания изолятора (круглое, овальное, квадратное). Технические данные опорных изоляторов показаны в табл. 22.8, где разрушающая нагрузка на изгиб приведена в деканьютонах (даН).

Таблица 22.8  
Изоляторы опорные армированные для внутренней установки

Тип изолятора	Номинальное напряжение, кВ	Разрушающая нагрузка на изгиб, даН	Высота, мм	Диаметр или ширина, мм	Масса, кг
ИО <sub>кр</sub> -6-375УЗ	6	375	165	109	2,5
ИООВ-6-375УЗ	6	375	165	160	2,8
ИО-6-375УЗ	6	375	100	77	1,12
ИО <sub>кр</sub> -6-750УЗ	6	750	185	136	4,43
ИООВ-6-750УЗ	6	750	185	215	5,0
ИО <sub>кр</sub> -10-375УЗ	10	375	190	109	2,8

Тип изолятора	Номиналь- ное напря- жение, кВ	Разрушающая нагрузка на изгиб, даН	Высота, мм	Диаметр или шири- на, мм	Масса, кг
ИООВ-10-375УЗ	10	375	190	160	3,8
ИО-10-375УЗ	10	375	120	82	1,3
ИО <sub>кр</sub> -10-750УЗ	10	750	215	136	4,47
ИО <sub>ов</sub> -10-750УЗ	10	750	215	215	5,38
ИО-10-750УЗ	10	750	120	102	2,0
ИОР-10-750УЗ	10	750	124	115	2,6
ИО <sub>кр</sub> -10-1250УЗ	10	1250	225	175	7,9
ИО <sub>кв</sub> -10-2000УЗ	10	2000	235	180	11,6
ИО-10-2000УЗ	10	2000	134	160	5,7
ИО-20-375УЗ	20	375	210	110	4,2
ИОР-20-750УЗ	20	750	160	160	5,7
ИО <sub>кв</sub> -20-2000УЗ	20	2000	315	220	17,6
ИО-20-3000УЗ	20	3000	208	186	13,2
ИО-35-375УЗ	36	375	380	136	7,22
ИООВ-35-375УЗ	35	375	380	215	7,78
ИО-35-375УЗ	35	375	372	110	7,1
ИО <sub>кв</sub> -35-750УЗ	35	750	400	190	12,96
ИО-35-750УЗ	35	750	372	140	10,5
ОФР-10-6000У2	10	6000	300	280	24,2
ОФР-10-375УЗ	10	375	180	94	1,6
ОФР-35-375У2	35	375	372	148	10,6
ОФР-10-750-1У2	10	750	121	112	2,2
ОФР-35-750У2	35	750	372	148	11,5
ОФР-10-2000У2	10	2000	134	170	6,4
ОФР-20-3000У2	20	3000	206	206	15,0
ОФР-10-3000У3	10	3000	150	200	9,8
ОФР-20-750крУ2	20	750	256	132	7,4
ОФР-20-750-1У2	20	750	202	160	6,5
ОФР-24-750крУ2	24	750	283	132	7,7
ОФР-10-750-II	10	750	190	220	5,6
ОФР-20-750-II	20	750	257	220	8,3
ИО-3-600У1	3	600	92	210	4,3
ИВМ-10-1200/1600УЗ	10	1200/1600	185	140×266	10,55
ИОР-6-250-0-3,5	10	250	70	78	0,65

Буквы в условных обозначениях изоляторов означают: И — изолятор, О — опорный, Ф — фарфоровый, Р — ребристый, ВМ — для масляных выключателей. Индексы кр, ов и кв означают соответственно круглую, овальную или квадратную форму нижнего основания изолятора. Цифры соответствуют классу изолятора по напряжению и по разрушающей нагрузке. Буква У означает район с умеренным климатом, З — закрытое помещение, 2 — помещение, где колебания температуры и влажности воздуха несущественно отличаются от колебаний на открытом воздухе.

*Изоляторы опорно-штыревые* — это изоляторы наружной установки, выпускаются на напряжения 6, 10, 20, 35 кВ. Марки изоляторов ОНШ и ОНВП (табл. 22.9). Буквы означают: О — опорный, Н — наружной установки, Ш — штыревой, ВП — с внутренней полостью. Цифры в обозначении означают класс по напряжению изолятора и разрушающее усилие.

Таблица 22.9

Изоляторы опорно-штыревые наружной установки

Тип изолятора	Номинальное напряжение, кВ	Разрушающая нагрузка на изгиб, кН	Высота, мм	Диаметр, мм	Масса, кг
ОНШ-10-500У1	10	5,0	190	160	4
ОНШ-10-2000У1	10	20,0	210	236	12
ОНШ-35-2000У1	35	20,0	400	430	41
ОНШ-35-1000У1	35	10,0	390	370	32
ОНВП-35-1000У1	35	10,0	400	190	22

*Изоляторы опорные стержневые* — это изоляторы наружной установки, выпускаются на напряжения 10, 20, 35, 40 и 110 кВ. Их технические данные приведены в табл. 22.10.

Таблица 22.10

Изоляторы опорные стержневые

Тип изолятора	Номинальное напряжение, кВ	Разрушающая нагрузка на изгиб, даН	Высота, мм	Диаметр, мм	Масса, кг
ОНСУ-10-300	10	300	302	150	9,3
КО-10	10	2000	284	185	26,0
ОНС-10-500	10	500	170	120	4,2
ОНС-20-500 I	20	500	315	150	9,0
ОНС-20-2000	20	2000	355	200	22,5

Тип изолятора	Номинальное напряжение, кВ	Разрушающая нагрузка на изгиб, даН	Высота, мм	Диаметр, мм	Масса, кг
ОНС-20-300	20	300	383	140	7,5
ИОС-35-500 I	35	500	440	175	16,0
ИОСУ-35-500 I	35	500	570	214	34,4
ОНС-35 2000	35	2000	500	225	43,5
ОНСУ-40-1000	40	1000	500	204	39,0
ИОС-110-400	110	400	1050	220	61,0
ИОС-110-600	110	600	1100	225	71,0
КО-110-1000	110	1000	1100	230	79,4
КО-110-1250	110	1250	1100	230	84,4
КО-110-1500	110	1500	1100	245	106,0
КО-110-2000	110	2000	1100	245	106,0
ОНС-110-2000	110	2000	1100	230	94,3
ИВВ-110Б-3000У1	110	3000	1394	450	225,0

Буквы в обозначениях означают: И — изолятор, О — опорный, Н — наружной установки, С — стержневой, У — усиленная изоляция, К — колонковый. Цифры определяют класс изоляции (номинальное напряжение) и разрушающую нагрузку на изгиб.

## 22.6. Изоляторы проходные фарфоровые

Изоляторы проходные фарфоровые предназначены для ввода или вывода проводов или шин высокого напряжения через стены зданий, из баков трансформаторов, сооружений станций и подстанций.

Различают проходные изоляторы для внутренних и наружных установок. Последние отличаются развитым ребрением. Проходные изоляторы имеют фарфоровый элемент, через внутреннюю полость которой проходит токоведущий стержень, шина или — для больших токов — группа шин. Проходные изоляторы на токи до 2000 А выпускаются с алюминиевыми токоведущими шинами. На токи 2000 и более ампер — без шин. В последнем случае шины встраивают и закрепляют непосредственно при монтаже изоляторов. Фарфоровый элемент с арматурой для фиксирования шин имеет чугунный фланец для крепления изолятора на стене или крышке трансформаторного бака.

*Изоляторы проходные внутренней установки.* Изоляторы проходные (ИП) внутренней установки выпускаются на номинальные напряжения 6, 10, 20, 35 кВ; номинальные токи 400, 630, 1000, 1600, 2000, 3150, 4000, 5000, 6300, 8000, 10000, 16000 А; разрушающие усилия на изгиб 375, 750, 2000, 3000, 4250 даН.

Технические характеристики изоляторов внутренней установки приведены в табл. 22.11.

Таблица 22.11

Изоляторы проходные внутренней установки

Тип	Номинальное напряжение, кВ	Номинальный ток, А	Разрушающая нагрузка на изгиб, даН	Высота, мм	Диаметр, мм	Масса, кг
ИП-6/400-375 У, ХЛ2	6	400	375	460	165	4,0
ИП-1000/630-750 У, ХЛ2	10	630	750	470	205	6,6
ИП-10/1000-750 У, ХЛ2	10	1000	750	520	190	7,0
ИП-10/1600-750 У, ХЛ2	10	1600	750	520	190	7,7
ИП-10/5000-4250 У2	10	5000	4250	640	390	75,0
ИП-10/6300-4250 У2	10	6300	4250	640	555	73,0
ИП-10/8000-4250 У2	10	8000	4250	640	555	70,0
ИП-10/10000-4250 У2	10	10000	4250	640	555	70,0
ИП-10/1000-3000 У, У2	10	1000	3000	518	305	24,5
ИП-20/1000-2000 У, ХЛ2	20	1000	2000	740	322	49,0
ИП-20/6300-2000 У, ХЛ2	20	6300	2000	740	520	105,0
ИП-20/10000 У2	20	10000	—	460	570	48,0
ИП-20/16000 У2	20	16000	—	460	750	112,0
ИП-35/400-750 У, ХЛ2	35	400	750	980	250	30,2
ИП-35/630-750 У, ХЛ2	35	630	750	980	250	31,3
ИП-35/1000-750 У, ХЛ2	35	1000	750	1010	260	34,0
ИП-35/1600-750 У, ХЛ2	35	1600	750	1010	260	34,5

Буквы У, ХЛ в обозначении означают, что изолятор предназначен для районов с умеренным и холодным климатом в помещениях (цифра 2).

*Изоляторы проходные наружной установки (ГОСТ 20479-79).* Изоляторы проходные наружной установки (табл. 22.12) выпускаются на номинальные напряжения 6, 10, 20, 35 кВ; номинальные токи 400, 630, 1000, 1600, 5000, 6300, 8000, 10000, 16000 А; разрушающие усилия на изгиб 375, 750, 2000, 3000, 4250 даН.

Таблица 22.12

## Изоляторы проходные армированные наружной установки

Тип	Номинальное напряжение, кВ	Номинальный ток, А	Разрушающая нагрузка на изгиб, даН	Высота, мм	Диаметр, мм	Масса, кг
ИП-10/630-750 У1	10	630	750	565	142	8,55
ИП-10/1000-750 У1	10	1000	750	1000	142	14,0
ИП-10/2000-1250 У1	10	2000	1250	640	205	11,3
ИП-10/5000-4250 У1	10	5000	4250	720	470	85,0
ИП-10/6300-4250 У1	10	6300	4250	720	470	81,5
ИП-10/8000-4250 У1	10	8000	4250	695	470	78,0
ИП-10/10000-4250 У1	10	10000	4250	695	470	78,0
ПНУ-10/400-760 Т	10	400	750	515	180	8,3
ИП-20/2000-1250 У1	20	2000	1250	886	240	34,0
ИП-20/3150-1250 У1	20	3150	1250	886	240	37,4
ИП-35/400-750 У1	35	400	750	1020	200	34,4
ИП-35/630-750 У1	35	630	750	1040	200	36,4
ИП-35/1000-750 У1	35	1000	750	1080	225	38,0
ИП-35/1600-750 У1	35	1600	750	1080	225	37,3

Изоляторы на напряжения 20 и 35 кВ изготавливаются с полупроводящими или проводящими покрытиями внутренней полости изолятора и поверхности, предназначенной для крепления фланца. Конструкция изоляторов обеспечивает надежное электрическое соединение полупроводящих или проводящих покрытий с соответствующими металлическими деталями изоляторов. Покрытия сохраняют свои свойства в течение всего срока эксплуатации. Допускается изготовление изоляторов на напряжение 20 кВ без применения полупроводящего слоя.

Изоляторы изготавливаются с токоведущими частями, закрепленными в изоляторе на предприятии-изготовителе. Изоляторы на номинальные токи 2000 А и выше и минимальное разрушающее усилие на изгиб 2000 даН и выше изготавливаются без токоведущих частей. Встраивание и закрепление в них соответствующей шины или комплекта шин производят непосредственно при монтаже.

Контактные выводы изоляторов обеспечивают возможность непосредственного присоединения к ним алюминиевых шин распределительных устройств, проводов и кабелей при помощи болтов или сварки.

Токоведущие части изоляторов исполнения У изготавливаются из алюминия и алюминиевых сплавов. Токоведущие части изо-

ляторов тропического исполнения Т изготавливаются из меди и медных сплавов по ГОСТ 434-78 и защищены гальваническими покрытиями или горячим лужением.

## 22.7. Изделия кордиеритовые

Изделия из кордиеритового материала предназначены для работы в электронагревательных и пускорегулирующих приборах и аппаратах постоянного тока, работающих при номинальном переменном напряжении до 500 В, 50 Гц, температура окружающего воздуха от -50 до +1100 °С. Основные технические данные кордиеритового материала приведены в табл. 22.13.

Таблица 22.13

Основные технические данные кордиеритового материала

Показатель	Величина
Предел прочности при статическом изгибе, МПа,	34,3
Удельное объемное электрическое сопротивление, Ом·м, не менее:	
400 °С	510
600 °С	10
800 °С	10
Температурный коэффициент линейного расширения, в интервале температур:	
от 20 до 100 °С	0,03...0,045
от 20 до 700 °С	0,04...0,055
Стойкость к тепловым ударам, °С, не менее	500
Водопоглощение, %, не более	15
Кажущаяся плотность, кг/м <sup>3</sup> , не менее	1900
Теплопроводность от 20 до 100 °С, Вт/м·°С	1...1,3
Огнеупорность, °С, не менее	1500

## 22.8. Изоляторы подвесные высокополимерные

Высокополимерные подвесные изоляторы относятся к числу изоляторов нового поколения и находят во всем мире все более широкое применение.

Высокополимерные подвесные изоляторы, имеющие форму гирлянды, включают несущий стержень из анизотропного стеклопластика, цельнолитую оболочку из атмосферостойкой кремнийорганической резины для защиты стержня и литые стальные оконцеватели. В России в последние годы в соответствии с ГОСТ 28856-90 и ТУ 3494-002-46784343-99 выпускаются стерж-

новые высокополимерные изоляторы на 35 и 110 кВ марок ЛК 70/35 (рис. 22.1), ЛК 70/110 и др.

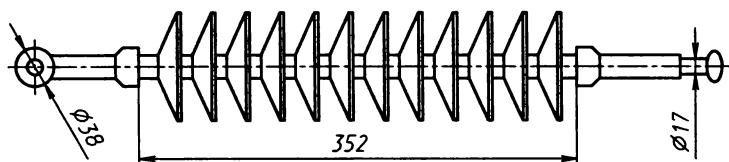


Рис. 22.1. Высокополимерный стержневой изолятор марки ЛК 70/35-ЛВ

Концы стеклопластикового стержня впрессованы в оконцеватели из стали марки 45Л, которые служат для монтажа изоляторов на линии. Стеклопластиковый стержень несет всю механическую и изолирующую нагрузку, его электрическая прочность 4 МВ/м. Вокруг стержня для его защиты от внешних воздействий из кремнийорганической смеси формируется цельнолитая оболочка в виде гирлянды. При напряжениях 110 и 330 кВ в начале и конце гирлянды отливаются экраны для выравнивания электрического поля вдоль изолятора.

Основные свойства некоторых полимерных стержневых изоляторов отечественного производства приведены в табл. 22.14.

Таблица 22.14  
Основные характеристики высокополимерных изоляторов

Показатель	ЛК 70/35-ЛВ	ЛК 70/110-ЛВ
Номинальное напряжение, кВ	35	110
Механическая разрушающая сила, кН	70	70
Разрядные напряжения, кВ, не менее:		
грозовых импульсов	220	520
промышленной частоты под дождем	70	—
промышленной частоты при испытательной проводимости 10 мкСм	42	110
Длина пути утечки, мм	850	2490
Строительная высота гирлянды, мм	560	1208
Изоляционное расстояние, мм	352	990
Диаметр ребер, мм	75	75
Количество ребер	12	36
Диаметр стержня, мм	24	24
Масса, кг, не более	1,45	2,9
Допустимая степень загрязненности атмосферы	IV	IV

Некоторые данные отечественных линейных, опорных высокополимерных изоляторов, изоляторов для контактной сети трамвая и троллейбуса, для контактной сети железнодорожного транспорта приведены в табл. 22.15.

Таблица 22.15

Типы и напряжения

Тип изолятора	Номинальное напряжение	Примечания, взаимозаменяемые изоляторы
<i>Линейные изоляторы</i>		
ЛК70/110-III (ЛК120/110-III)	110	9 шт. ПСД70Е, ПС120Б
ЛК70/110-IV (ЛК120/110-IV)	110	12 шт. ПСД70Е, ПС120Б
ЛК70/35-IV	35	4 шт. ПС70Е, ПС120Б
LS70/20	20	2 шт. ПС70Е
ЛК70/10-IV	10	2 шт. ПС70Е
<i>Опорные изоляторы для электрических аппаратов</i>		
ИОСК 8/35 УХЛ1	35	С4-200, С6-200, С8-200
ИОСК 8/35 УХЛ2	35	ИОР-35-7,5 УХЛ2, ИО-35-7,5 УЗ
ИОСК 3/35 УХЛ1	35	
ИОСК 4/20 II УХЛ1	20	С4-170, ИОМ-20-500
ИОСК 4/10 IV УХЛ1	10	С4-125, ИОС-20-300
ИОСК 4/10 II УХЛ1	10	С4-80, ИОС-10-500
ИОСК 2/10 IV УХЛ1	10	
ИОСК-10-8 УХЛ2	10	ИОР-10-750
<i>Изоляторы для контактной сети трамвая и троллейбуса</i>		
НСК 51/800-VII-1	0,55	натяжные
НСК 51/800-VII-2	0,55	натяжные
НСК 36/800-VII-1 УП	0,55	натяжные
НСК 36/800-VII-1 ПП	0,55	натяжные
НСК 36/800-VII-2 УУ	0,55	натяжные
НСК 36/800-VII-2 УП	0,55	натяжные
НСК 36/800-VII-2 ПП	0,55	натяжные
<i>Изоляторы для контактной сети железнодорожного транспорта</i>		
ПСПКр 70-3/0,6	3	подвесные
ПСПКр 70-25/1,1	25	подвесные
ПСПКр 70-25/1,5	25	подвесные
НСПКр 120-3/0,6	3	натяжные
НСПКр 120-25/1,1	25	натяжные
НСПКр 120-25/1,5	25	натяжные
ФСПКр 120-3/0,6	3	фиксаторные

Тип изолятора	Номинальное напряжение	Примечания, взаимозаменяемые изоляторы
ФСПКр 120-25/1,1	25	фиксаторные
ФСПКр 120-25/1,5	25	фиксаторные
КСПКр 120-3/0,6	3	консольные
КСПКр 120-25/1,1	25	консольные
КСПКр 120-25/1,5	25	консольные

Высокополимерные изоляторы имеют в сравнении с традиционными гирляндами из изоляторов ПФ или ПС несомненные достоинства. При прочих равных с традиционными гирляндами показатели высокополимерные изоляторы значительно легче их. Для сравнения: масса гирлянды на 110 кВ из 8 изоляторов ПФ составляет 40 кг, высокополимерного — 2,9 кг. Изоляторы этого типа обладают лучшими антивандальными свойствами, поскольку цельнолитая оболочка из кремнийорганической смеси в силу гибкости не поддается бою. Кроме того, наибольший диаметр ребер высокополимерного изолятора в среднем в 3 раза меньше диаметра соответствующего подвешного фарфорового или стеклянного изолятора.

Высокополимерные изоляторы за рубежом (Германия, Япония, Испания, Венгрия, Франция и др.) находят все более широкое применение при сооружении ЛЭП и подстанций. Выпускаются высокополимерные изоляторы на напряжения от 20 до 500 кВ при механической разрушающей нагрузке от 70 до 300 кН. Например, высокополимерный серийный изолятор Н 500.160.3870.ЕЕ на номинальное напряжение 500 кВ на разрушающую нагрузку 160 кН весит всего 25,2 кг. Последняя цифра в обозначении — строительная длина изолятора в мм.

В упомянутых странах в 1994—1998 гг. сооружены и находятся в эксплуатации ЛЭП на напряжения 120, 220, 380 и 400 кВ. Несмотря на все еще высокую стоимость исходных высокополимеров и некоторые технологические проблемы, следует ожидать, что высокополимерные изоляторы в дальнейшем будут все более вытеснять традиционные гирлянды из фарфоровых и стеклянных подвесных изоляторов.

## 23. КОНДЕНСАТОРЫ

### 23.1. Основные параметры конденсаторов

Конденсатор является обладающим электрической емкостью концентратором энергии электрического поля и состоит из разделенных диэлектриком проводящих электродов — обкладок с выводами для присоединения к электрической цепи.

*Емкость конденсатора* есть отношение величины заряда конденсатора  $Q$  к разности потенциалов  $U$ , которая создается на обкладках конденсатора,  $\Phi$ :

$$C = Q / U.$$

За единицу емкости в международной системе СИ принимают фараду ( $\Phi$ ) — емкость такого конденсатора, у которого потенциал возрастает на один вольт при сообщении ему заряда в один кулон (Кл). Это очень большая величина, поэтому для практических целей используют более мелкие единицы емкости: микрофараду (мкФ), нанофараду (нФ) и пикофараду (пФ):

$$1 \Phi = 10^6 \text{ мкФ} = 10^9 \text{ нФ} = 10^{12} \text{ пФ}.$$

Емкость конденсатора зависит от площади обкладки конденсатора  $S$ , толщины слоя разделяющего их диэлектрика  $d$  и электрических свойств диэлектрика, характеризующихся диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ :

$$C = \epsilon S / d.$$

*Номинальной* называют емкость конденсатора, обозначенную на его корпусе. Номинальные значения емкости стандартизованы.

МЭК (Публикация № 63) установлено семь предпочтительных рядов для значений номинальной емкости: Е3; Е6; Е12; Е24; Е48; Е96; Е192. Цифры после буквы Е указывают на число номинальных значений в каждом десятичном интервале (декаде), которые соответствуют числам 1,0; 1,5; 2,2; 3,3; 4,7; 6,8 или числам, полученным путем умножения или деления на  $10^n$ , где  $n$  —

целое положительное или отрицательное число. В условном обозначении номинальная емкость выражена в микрофарадах (мкФ) или в пикофарадах (пФ).

Для обозначения номинальных емкостей применяется система кодирования. Она состоит из трех или четырех знаков, включающих две или три цифры и букву. Буква кода из русского или латинского алфавита обозначает множитель, составляющий значение емкости, и определяет положение запятой. Буквы П(р), Н(п), М(м), И(1), Ф(Р) обозначают множители  $10^{-12}$ ,  $10^{-9}$ ,  $10^{-6}$ ,  $10^{-3}$  и 1, соответственно, для значений емкости, выраженной в фарадах. Например, емкость 2,2 пФ обозначается 2П2 (2р2); 1500 пФ — 1Н5 (1п5); 0,1 мкФ — М1 (м1); 10 мкФ — 10М (10м); 1 фарада — 1ФО (1FO).

Фактическое значение емкости может отличаться от номинального на величину допускаемого отклонения в процентах. *Допускаемые отклонения* изменяются в зависимости от типа и точности конденсатора в весьма широких пределах от  $\pm 0,1$  до  $+80\%$ .

*Номинальным* называют напряжение, указанное на конденсаторе или в документации на него, при котором он может работать в заданных условиях в течение срока службы с сохранением параметров в допустимых пределах. Номинальное напряжение зависит от конструкции конденсатора и свойств применяемых материалов. При эксплуатации напряжение на конденсаторе не должно превышать номинальное. Для многих типов конденсаторов с увеличением температуры (обычно  $70...85\text{ }^{\circ}\text{C}$ ) допустимое напряжение снижается.

Номинальные напряжения конденсаторов устанавливаются в соответствии с рядом (ГОСТ 9665-77): 1; 1,6; 2,5; 3,2; 4; 6,3; 10; 16; 20; 25; 32; 40; 50; 63; 80; 100; 125; 160; 200; 250; 315; 350; 400; 450; 500; 630; 800; 1000; 1600; 2000; 2500; 3000; 4000; 5000; 6300; 8000; 10 000 В.

*Температурный коэффициент емкости* (ТКЕ) определяет относительное изменение емкости (в миллионных долях) от температуры при изменении ее на  $1\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

*Тангенс угла потерь* ( $\text{tg}\delta$ ) характеризует потери электрической энергии в конденсаторе. Значения тангенса угла потерь у полистирольных и фторопластовых конденсаторов находятся в пределах  $(10...15)\cdot 10^{-4}$ , поликарбонатных —  $(15...25)\cdot 10^{-4}$ , оксидных —  $5...35\%$ , полиэтилентерефталатных —  $0,01...0,012$ .

Величина, обратная тангенсу угла потерь, называется *добротностью конденсатора*.

*Сопротивление изоляции и ток утечки*. Эти параметры характеризуют качество диэлектрика. Наиболее высоким сопротивлением изоляции обладают фторопластовые, полистироль-

ные и полипропиленовые конденсаторы, несколько ниже сопротивление у высокочастотных керамических, поликарбонатных и лавсановых конденсаторов.

Для маркировки конденсаторов постоянной емкости применяют букву К (конденсатор постоянной емкости) и цифры, определяющие вид диэлектрика. В табл. 23.1 приведены сокращенные обозначения и типы некоторых конденсаторов в табл. 23.2 — сведения о некоторых типах конденсаторов, предназначенных для работы в цепях постоянного, переменного и пульсирующего токов [23].

Таблица 23.1

Сокращенные обозначения и типы конденсаторов по виду диэлектрика

Сокращенные обозначения	Тип конденсатора по виду диэлектрика
K10	Керамические на номинальные напряжения ниже 1600 В
K15	Керамические на номинальные напряжения 1600 В и выше
K21	Стеклянные
K22	Стеклокерамические
K23	Стеклоэмалевые
K31	Слюдяные малой мощности
K32	Слюдяные большой мощности
K40	Бумажные на номинальное напряжение ниже 1600 В с фольговыми обкладками
K41	Бумажные на номинальное напряжение 1600 В и выше с фольговыми обкладками
K42	Бумажные с металлизированными обкладками (металлобумажные)
K50	Электролитические алюминиевые
K51	Электролитические танталовые фольговые
K52	Электролитические танталовые объемно-пористые
K53	Оксидно-полупроводниковые
K70	Полистирольные с фольговыми обкладками
K71	Полистирольные с металлизированными обкладками
K72	Фторопластовые
K73	Полиэтилентерефталатные с металлизированными обкладками
K74	Полиэтилентерефталатные с фольговыми обкладками
K75	Комбинированные
K76	Лакопленочные
K77	Поликарбонатные
K78	Полипропиленовые

Таблица 23.2

Технические данные конденсаторов для работы в цепях постоянного, переменного и пульсирующего токов

Тип конденсатора	Классификация, вариант исполнения, назначение. Диапазон температур	Диапазон номинальных емкостей, мкФ	Номинальное напряжение, В	Допускаемые отклонения емкости, %
K42-4	Металлобумажные герметизированные. В корпусе цилиндрической формы. Для работы в цепях постоянного, переменного и пульсирующего токов. -60...+100 °С	1...20	160	±5; ±10; ±20
		0,5...10	300	±5; ±10; ±20
		0.5...4	500	±5; ±10; ±20
K42-17	Бумажные с металлизированными обкладками. В прямоугольных металлических корпусах. Для работы в качестве пусковых для однофазных электродвигателей. -60...+85 °С	10...100	380	±10; ±20
K42-19	Металлобумажные уплотненные частотные. Для работы в качестве встроенных элементов внутреннего монтажа аппаратуры в цепях переменного и пульсирующего токов. -50...+55 °С	2; 3,9; 10 16; 20	250	±5; ±10; ±20
		1;2; 3,9; 6,2 10; 12; 16	500	±5; ±10; ±20
K42-20	Бумажные с металлизированными обкладками. Для работы в схемах однофазных асинхронных электродвигателей бытовых приборов с частотой сети 50 Гц. -25...+55°С	30х3,3 60х4,7	250х400 250х400	+20...-5 +20...-5
K73П-2	Пленочные полиэтилентерефталатные с металлизированными обкладками непропитанные. Предназначены для работы в цепях постоянного, переменного и пульсирующего токов. -25...+55 °С	0,5...15,0	400	±5; ±10; ±20
		0,25...10,0	630	±5; ±10; ±20
		0,5...10,0	1000	±5; ±10; ±20
K73П-4	Полиэтилентерефталатные герметизированные. Выпускаются в металлическом корпусе. Для работы в цепях постоянного, переменного и пульсирующего токов. -60...+70 °С	0,5...2,0	250	±10; ±20
		4,0...8,0	250	±10; ±20
		10,0...15,0	250	±10; ±20
K78-4	Полипропиленовые металлизированные. Для работы в схемах однофазных асинхронных двигателей при частоте сети 50 Гц. -60...+70 °С	3,3...68	160	±10; ±20
		2,2...33	250	±10; ±20
		0,47...10	500	±10; ±20

Окончание табл. 23.2

Тип конденсатора	Классификация, вариант исполнения, назначение. Диапазон температур	Диапазон номинальных емкостей, мкФ	Номинальное напряжение, В	Допускаемые отклонения емкости, %
МБГВ	Металлобумажные высоковольтные импульсные, в прямоугольных корпусах с лепестковыми выводами. Для формирования мощных импульсов тока разряда в нагрузке, обладают высокой энергоемкостью. -60...+60 °С	100	500	±10
		100	1000	±10
		200	1000	±10
МБГО	Металлобумажные высоковольтные импульсные, в прямоугольных корпусах с лепестковыми выводами. Для формирования мощных импульсов тока разряда в нагрузке, обладают высокой энергоемкостью. -60...+60 °С	20...30	160	±10; ±20
		1...30	300	±10; ±20
		1...20	400	±10; ±20
		0,5...20	500	±10; ±20
		0,25...20	630	±10; ±20
МБГП	Металлобумажные высоковольтные импульсные, в прямоугольных корпусах с лепестковыми выводами. Для формирования мощных импульсов тока разряда в нагрузке, обладают высокой энергоемкостью. -60...+70 °С	0,5...20	200	±10; ±20
		0,5...10	400	±10; ±20
		0,1...10	630	±10; ±20
		0,5...10	1000	±10; ±20
		0,25...20	1600	±10; ±20
МБГТ	Металлобумажные. Выпускаются в металлических корпусах, герметизированные. Для работы в цепях постоянного, переменного и пульсирующего токов. -60...+100 °С	1...20	160	±2
		0,5...10	300	±5
		0,25...10	500	±5
		0,1...10	750	±5
		0,1...10	1000	±5
МБГН	Металлобумажные, в металлических корпусах, герметизированные. Для работы в цепях постоянного, переменного и пульсирующего токов. -60...+70 °С	1...27	200	±5, ±10
МБГЧ	Металлобумажные, в металлических корпусах, герметизированные. Для работы в цепях постоянного, переменного и пульсирующего токов. -60...+70 °С	МБГЧ-1		
		0,5...10	250	±10; ±20
		0,25...4	500	±10; ±20
		0,25...2	750	±10; ±20
		0,25...1	1000	±10; ±20
		МБГЧ-2		
		0,25	500	±10; ±20
		1	380	±10; ±20
		0,5, 10	250	±10; ±20

## 23.2. Конденсаторы типа ДПС и КЭМ

Конденсаторы типа ДПС на полипропиленовой основе, выпускаемые заводом конденсаторного оборудования АО «ЭЛЕКТРОИНТЕР» (г. Серпухов), относятся к числу новых отечественных изделий, предназначенных для использования в качестве рабочих и пусковых конденсаторов для асинхронных двигателей.

Конденсаторы ДПС (табл. 23.3) выпускают на номинальные напряжения от 250 до 450 В, номинальные емкости от 1 до 80 и 40 мкФ цилиндрической формы в пластиковом ДПС(П) и алюминиевом ДПС(А) корпусах. Конденсаторы имеют  $\tan \delta$  не более  $5 \cdot 10^{-4}$ , испытываются на напряжение между выводами  $2,15 U_n$ .

Таблица 23.3  
Технические данные конденсаторов ДПС (А) и ДПС(П)

ДПС (А)			ДПС (П)		
Емкость, мкФ	Диаметр, мм	Высота, мм	Емкость, мкФ	Диаметр, мм	Высота, мм
1,00	30	63	1,00	25	51
1,50	30	63	1,50	25	51
2,00	30	63	2,00	25	51
2,50	30	63	2,50	25	51
3,00	30	63	3,15	30	51
3,15	30	63	3,50	30	51
4,00	30	63	4,00	30	51
5,00	30	78	5,00	30	71
6,00	30	78	6,30	30	71
6,30	30	78	7,00	30	71
7,00	35	78	8,00	30	71
8,00	35	78	9,00	35	71
10,00	35	78	10,00	35	71
11,00	35	103	11,00	35	71
12,00	35	103	12,50	35	71
12,50	35	103	14,00	40	71
14,00	35	103	16,00	40	71
15,00	35	103	18,00	45	71
16,00	40	103	20,00	45	71
18,00	40	103	22,00	45	71
20,00	40	103	25,00	45	91
22,00	45	128	27,50	45	91

ДПС (А)			ДПС (П)		
Емкость, мкФ	Диаметр, мм	Высота, мм	Емкость, мкФ	Диаметр, мм	Высота, мм
25,00	45	128	30,00	45	91
30,00	45	128	31,50	45	116
32,00	45	128	35,00	45	116
35,00	55	128	40,00	45	116
40,00	55	128	—	—	—
45,00	55	128	—	—	—
50,00	55	128	—	—	—
60,00	55	128	—	—	—
80,00	60	138	—	—	—

### 23.3. Конденсаторы низковольтные для повышения коэффициента мощности

Косинусные конденсаторы (табл. 23.4—23.6) и установки на их основе используются в качестве местных источников реактивной мощности. Их применение позволяет разгрузить электрические сети от реактивной составляющей тока и тем самым с одной стороны уменьшить сечение выбираемых проводов, шин, кабелей, с другой — уменьшить потери электроэнергии в проводах и шинах.

Реактивная мощность компенсирующих устройств определяется по выражению, квар:

$$Q = k \cdot P (\operatorname{tg} \varphi_1 - \operatorname{tg} \varphi_2),$$

где  $P$  — расчетная активная мощность электроприемников, кВт;

$\varphi_1$  и  $\varphi_2$  — углы сдвига фаз до и после компенсации реактивной мощности;  $k$  — коэффициент повышения коэффициента мощности,  $k = 0,9$  для практических расчетов.

Таблица 23.4  
Технические данные однофазных конденсаторов серии КЭМ

Номинальное напряжение, В	Емкость, мФ	Мощность, квар	Размер, мм
230	100	1,67	60x132
400	66,3	3,33	60x132
400	83	4,17	60x132

Окончание табл. 23.4

Номинальное напряжение, В	Емкость, мФ	Мощность, квар	Размер, мм
415	61,1	3,3	60x132
415	77	4,17	60x132
450	52,4	3,33	60x132
450	65,5	4,17	60x132
500	42,4	3,33	60x132
525	38,5	3,33	60x132
550	35,1	3,33	60x132
550	43,9	4,17	60x132

Таблица 23.5

Конденсаторы косинусные низковольтные типа КС

Марка	Напряжение, кВ	Емкость, мкФ	Высота с изолятором, мм	Масса, кг
КС1-0,22-6-3У3	0,22	397	408	28
КС2-0,22-12-3У3	0,22	794	726	56
КС1-0,38-18-3У3	0,38	397	408	28
КС2-0,38-36-3У3	0,38	794	726	56
КС2-0,38-50-3У3	0,38	1102	726	56
КС1-0,5-18-3У3	0,5	230	408	28
КС2-0,5-36-3У3	0,5	460	726	56
КС1-0,66-20-3У3	0,66	146	422	28
КС1-0,66-25-3У3	0,66	183	422	28
КС2-0,66-40-3У3	0,66	292	740	56
КС2-0,66-50-3У3	0,66	366	740	56

Таблица 23.6

Конденсаторы низковольтные для повышения коэффициента мощности типа КЭ и КЭК

Тип	Номинальное напряжение, кВ	Мощность, квар	Номинальная емкость, мкФ	Высота конденсатора, мм	Масса, кг, не более
КЭ1-0,38-25-2У3	0,38	25	551,0	410	26
КЭ1-0,38-25-3У3	0,31	25	551,0	410	26
КЭ2-0,38-40-2У3	0,38	40	882,0	480	53
КЭ2-0,38-40-3У3	0,38	40	882,0	480	53
КЭ2-0,38-50-2У3	0,38	50	1102,0	480	53

Окончание табл. 23.6

Тип	Номинальное напряжение, кВ	Мощность, квар	Номинальная емкость, мкФ	Высота конден- сатора, мм	Масса, кг, не более
КЭ2-0,38-50-3УЗ	0,38	50	1102,0	480	53
КЭК1-0,4-33 <sup>1/3</sup> -2УЗ	0,4	33 <sup>1/3</sup>	663,0	410	25
КЭК1-0,4-33 <sup>1/3</sup> -3УЗ	0,4	33 <sup>1/3</sup>	663,0	404	25
КЭК2-0,4-67-2УЗ	0,4	67	1334,0	725	50
КЭК2-0,4-67-3УЗ	0,4	67	1334,0	725	50
КЭ1-0,66-25-2УЗ	0,66	25	183,0	418	26
КЭ1-0,66-25-3УЗ	0,66	25	183,0	418	26
КЭ2-0,66-50-2УЗ	0,66	50	366,0	480	53
КЭ2-0,66-50-3УЗ	0,66	50	366,0	480	53

Цифры в обозначении означают: 1 — однофазное исполнение с одним изолированным выводом; 2 — однофазное исполнение с двумя изолированными выводами; 3 — трехфазное исполнение с соединением конденсаторов в треугольник.

### 23.4. Конденсаторы для электротермических установок

Технические данные конденсаторов для электротермических установок на частоты от 500 до 10000 Гц на номинальное напряжение от 0,8 до 2 кВ приведены в табл. 23.7.

Таблица 23.7  
Конденсаторы для электротермических установок

Тип	Номинальное напряжение, кВ	Частота, кГц	Номинальная мощность, квар	Номинальная емкость, мкФ
ЭСВК-0,8-0,5УЗ	0,8	0,5	300	149,30
ЭСВК-1-0,5УЗ	1,0	0,5	300	95,50
ЭСВК-1,6-0,5УЗ	1,6	0,5	300	37,30
ЭСВК-2-0,5УЗ	2,0	0,5	300	23,90
ЭСВК-0,8-1УЗ	0,8	1,0	550	112,00
ЭСВК-1-1УЗ	1,0	1,0	550	71,70
ЭСВК-1,6-1 УЗ	1,6	1,0	550	28,00
ЭСВК-2-1УЗ	2,0	1,0	550	17,90
ЭСВК-0,5-2,4УЗ	0,5	2,4	550	146,00

Продолжение табл. 23.7

Тип	Номинальное напряжение, кВ	Частота, кГц	Номинальная мощность, квар	Номинальная емкость, мкФ
ЭСВК-0,8-2,4УЗ	0,8	2,4	550	57,00
ЭСВК-1-2,4УЗ	1,0	2,4	550	36,50
ЭСВК-1,6-2,4УЗ	1,6	2,4	550	14,25
ЭСВК-2-2,4УЗ	2,0	2,4	550	9,10
ЭСВК-0,5-4УЗ	0,5	4,0	550	87,58
ЭСВК-0,8-4УЗ	0,1	4,0	550	34,21
ЭСВК-1-4УЗ	1,0	4,0	550	21,89
ЭСВК-1,64УЗ	1,6	4,0	550	1,55
ЭСВК-2-4УЗ	2,0	4,0	550	5,47
ЭСВК-0,5-10УЗ	0,5	10,0	650	41,40
ЭСВК-0,8-10УЗ	0,8	10,0	650	16,17
ЭСВ-0,8-0,5-2УЗ	0,8	0,5	200	99,50
ЭСВ-1-0,5-2УЗ	1,0	0,5	200	63,60
ЭСВ-1,6-0,5-2УЗ	1,6	0,5	200	24,90
ЭСВ-2-0,5-2УЗ	2,0	0,5	200	15,91
ЭСВ-0,8-1-2УЗ	0,1	1,0	250	61,20
ЭСВ-1-1-2УЗ	1,0	1,0	250	39,10
ЭСВ-1,6-1-2УЗ	1,6	1,0	250	15,55
ЭСВ-2-1-2УЗ	2,0	1,0	250	9,95
ЭСВ-0,8-2,4-2УЗ	0,1	2,4	300	31,20
ЭСВ-1-2,4-2УЗ	1,0	2,4	300	19,90
ЭСВ-1,6-2,4-2УЗ	1,6	2,4	300	7,10
ЭСВ-2-2,4-2УЗ	2,0	2,4	300	4,97
ЭСВ-0,8-4-2УЗ	0,1	4,0	350	21,10
ЭСВ-1-4-2УЗ	1,0	4,0	350	13,90
ЭСВ-2-2-2УЗ	2,0	10,0	350	3,48
ЭСВ-0,8-10-2УЗ	0,1	10,0	400	9,96
ЭСВП-0,8-10УЗ	0,1	10,0	400	9,96
ЭЭВ-0,8-0,5-2УЗ	0,8	0,5	200	99,50
ЭЭВ-1-0,5-2УЗ	1,0	0,5	200	63,60
ЭЭВ-1,6-0,5-2УЗ	1,6	0,5	200	24,90
ЭЭВ-2-0,5-2УЗ	2,0	0,5	200	15,91
ЭЭВ-0,8-1-2УЗ	0,1	0,5	200	62,20
ЭЭВ-1-1-2УЗ	1,0	0,5	200	39,80
ЭЭВ-1,6-1-2УЗ	1,6	1,0	250	15,55
ЭЭВ-2-1-2УЗ	2,0	1,0	250	9,95

Тип	Номинальное напряжение, кВ	Частота, кГц	Номинальная мощность, квар	Номинальная емкость, мкФ
ЭЭВ-0,8-2,4-2УЗ	0,1	2,4	300	31,20
ЭЭВ-1-2,4-2УЗ	1,0	2,4	300	19,90
ЭЭВ-1,6-2,4-2УЗ	1,6	4,0	300	7,80
ЭЭВ-2-2,4-2УЗ	2,0	4,0	300	4,97
ЭЭВ-0,8-4-2УЗ	0,8	4,0	350	21,80
ЭЭВ-1-4-2УЗ	1,0	4,0	350	13,90
ЭЭВ-1,6-4-2УЗ	1,6	4,0	350	5,45
ЭЭВ-2-4-2УЗ	2,0	4,0	350	3,41
ЭЭВ-0,8-10-2УЗ	0,8	10,0	400	9,96
ЭЭВП-0,8-10УЗ	0,1	10,0	400	9,96

### 23.5. Конденсаторы связи

Конденсаторы связи типа СМК, СМКВ, СМИ, СОМИ на  $110/\sqrt{3}$ ,  $133/\sqrt{3}$  и  $166/\sqrt{3}$  кВ (табл. 23.8) выполнены с комбинированным диэлектриком и имеют изолирующие подставки типа ПИ5 и ПИ6.

Таблица 23.8

Конденсаторы связи

Тип	Номинальное напряжение, кВ	Номинальная емкость, нФ	Габаритные размеры, мм		Масса, кг
			диаметр	высота	
СМ-66/ $\sqrt{3}$ -4,4У1	$66/\sqrt{3}$	4,4	280	890	68
СМ-110/ $\sqrt{3}$ -6,4У1	$110/\sqrt{3}$	6,4	330	1170	140
СМ-133/ $\sqrt{3}$ -18.6У1	$133/\sqrt{3}$	18,6	730	1375	765
СМ-166/ $\sqrt{3}$ -14У1	$166/\sqrt{3}$	14,0	730	1375	765
СМ-15-107У1 $\sqrt{3}$	$15/\sqrt{3}$	107,0	730	450	345
СММ-20/ $\sqrt{3}$ -35У1	$20/\sqrt{3}$	35,0	—	406	13
СММ-20/ $\sqrt{3}$ -107У1	$20/\sqrt{3}$	107,0	—	664	-25
СМБ-20-17.5ТВ1	20	17,5	280	890	75
СМК-115-80У1	115	80	730	1576	850

Тип	Номиналь- ное напря- жение, кВ	Номиналь- ная ем- кость, нФ	Габаритные размеры, мм		Масса, кг
			диаметр	высота	
СМКВ-115-80У1	115	80	730	1621	850
СМИ-166/ $\sqrt{3}$ -14У1	166/ $\sqrt{3}$	14	730	1375	750
СОМИ-166/ $\sqrt{3}$ +15-4+107У1	166/ $\sqrt{3}$	14; 107	730	2175	1100
СМИ-188/ $\sqrt{3}$ -12У1	188/ $\sqrt{3}$	12; 105	730	1375	750
СОМИ-188/ $\sqrt{3}$ +15-12+105У1	188/ $\sqrt{3}$	12	730	2175	1100

## 23.6. Конденсаторы сверхвысокой энергоемкости или молекулярные конденсаторы

Электрохимические конденсаторы (ЭК) или суперконденсаторы, разработанные в России в МНПО ЭКОНД, ЗАО «ЭСМА» и др., относятся к устройствам, в которых электрическая энергия накапливается в двойном электрическом слое — особой области, существующей на границе раздела твердого тела и электролита. Благодаря чрезвычайно большой поверхности применяемых материалов емкость суперконденсаторных элементов достигает 100 000 фарад. Такие конденсаторы, производство которых основано на новейших технологиях, называют также молекулярными. Поскольку сведений о таких конденсаторах в широкой литературе крайне мало, остановимся на них подробнее.

### 23.6.1. Конденсаторы энергоемкие импульсные (ИКЭ)

Конденсаторы сверхвысокой энергоемкости (ИКЭ) «Эконд-Супер» разработаны МНПО «Эконд». Плотность энергии в них в 10 раз выше, чем в лучших традиционных конденсаторах, а мощность импульсного разряда до 10 раз выше мощности аккумуляторных батарей. ИКЭ «Эконд-Супер» открывают новые возможности применения вместо традиционных конденсаторов и батарей.

ИКЭ «Эконд-Супер» наиболее эффективны в таких областях техники, где требуются импульсное выделение энергии за время порядка 0,1...10 с, например:

— запуск двигателей легковых и грузовых автомобилей, локомотивов, особенно в неблагоприятных условиях, таких как низкие (или высокие) температуры или разряженная аккумуляторная батарея;

— импульсное технологическое оборудование, рентгеновские аппараты медицинского назначения;

— системы бесперебойного электроснабжения ответственных потребителей (вычислительная техника, системы управления и связи, опасные производства);

— в комбинации с ветро- и гидрогенераторами или солнечными батареями;

— источники импульсной мощности для разгона электротранспорта с гибридной энергоустановкой, электромобилей и электробусов и рекуперации электроэнергии, накопленной при торможении;

— вместо аккумуляторов в малогабаритных электротранспортных средствах с заданных маршрутом.

Принцип действия ИКЭ «Эконд-Супер» основан на прямом накоплении заряда в двойном электрическом слое на поверхности контакта высокопористого электрода со связанным электролитом.

Данная физическая система обладает следующими характеристиками:

— сверхвысокие плотности электрической емкости заряда и энергии, которые могут достигать в пределе соответственно  $100 \text{ Ф/см}^3$ ,  $100 \text{ Кл/см}^3$ ,  $50 \text{ Дж/см}^3$  в объеме пористого электрода;

— очень малое внутреннее сопротивление, что позволяет достигать удельной мощности импульсного разряда порядка  $10 \text{ Вт/см}^3$ ;

— малая величина собственного времени заряда и разряда, охватывающая диапазон  $0,025 \dots 10 \text{ с.}$ ;

— малый ток утечки на единицу накопленного заряда и возможность длительного хранения заряда в течение сотен часов;

— количество циклов «заряд-разряд», которое приближается к  $10^6$ .

Емкость элементов перекрывает диапазон от  $1 \text{ Ф}$  до  $2000 \text{ Ф}$  при минимальной величине внутреннего сопротивления около  $0,001 \text{ Ом}$ .

ИКЭ «Эконд-Супер» представляет собой батарею конденсаторных элементов, заключенных в герметичный корпус, энергоемкостью от  $1$  до  $100 \text{ кДж}$  при плотности энергии порядка  $0,5 \dots 5,0 \text{ Дж/см}^3$  в зависимости от применения и конструктивного исполнения. Номинальное напряжение заряда батареи может

регулироваться в пределах от единиц до сотен вольт путем последовательного набора требуемого количества элементов.

К дополнительным преимуществам ИКЭ «Эконд-Супер» следует отнести: пожаро- и взрывобезопасность; высокую механическую прочность при статических и динамических воздействиях; устойчивость к кратковременным воздействиям высоких перенапряжений и токам короткого замыкания. Кроме того, конденсаторы не нуждаются в обслуживании в процессе эксплуатации.

Технические данные ИКЭ представлены в табл. 23.9.

Таблица 23.9

Технические данные ИКЭ

Тип ИКЭ, кДж/В	$U_n, В$	$C, Ф$	$I_{разр} \text{ макс, А}$	Высота ИКЭ*, мм	Вес ИКЭ, кг	Применение
6/14	14	60	600	70	8	Пуск двигателей внутреннего сгорания легковых и грузовых автомобилей, тракторов
9/14	14	100	700	110	10	
16/14	14	160	1200	150	14	
20/28	28	55	1400	180	18	Пуск двигателей внутреннего сгорания грузовых автомобилей, комбайнов, и т. д. Пуск дизелей рефрижераторных вагонов
30/28	28	75	1750	240	22	
40/28	28	100	2000	300	23	
40/14	14	400	1000	310	26	Электромобиль, электрокар, источники гарантированного питания
70/36	36	105	1500	420	34	
40/96	96	8,5	1300	330	29	Пуск дизелей магистральных и маневровых тепловозов
40/64	64	23,0	1900	360	32	
33/200	200	1,6	400	225	20	Агрегаты бесперебойного питания, электропривод коммутационных аппаратов, импульсные источники тока
20/150	150	1,9	400	190	19	
15/175	175	1,0	1000	235	21	
40/300	300	0,95	400	350	30	
						свето- и радиозвуковых навигационных маяков

\* Диаметр ИКЭ равен 230 мм.

Сравнение характеристик сверхэнергоемких конденсаторов ИКЭ с традиционными электрическими конденсаторами и аккумуляторами представлено в табл. 23.10.

Таблица 23.10

Сравнительные характеристики ИКЭ, конденсаторов и аккумуляторов

Сравнительный параметр	Конденсаторы	ИКЭ	Аккумуляторы
Плотность энергии, Дж/см <sup>3</sup>	менее 0,1	0,5...5,0	более 25
Время перезарядки, с	менее 10 <sup>3</sup>	0,025...5	более 10 <sup>4</sup>
Удельная максимальная мощность разряда, Вт/см <sup>3</sup>	более 10	0,1...10	менее 0,1
Количество циклов	более 10 <sup>6</sup>	10 <sup>3</sup> ...10 <sup>6</sup>	менее 10 <sup>3</sup>

### 23.6.2. Электрохимические конденсаторы типа ЭК

Элементы и электрохимические конденсаторы ЗАО «ЭСМА» различного исполнения обладают характеристиками в широком диапазоне значений: запасаемая энергия — до 30 Вт·ч; удельная мощность — до 3 кВт/кг; время заряда — 0,5...20 мин; большой ресурс (более 10000 циклов заряда-разряда для «тяговых» и более 100 000 циклов для «стартерных» ЭК).

Ряд особенностей конструкции ЭК сближает их с традиционными аккумуляторами. Благодаря этому, такие накопители энергии сочетают в себе высокую удельную энергию и малый саморазряд, унаследованные от аккумуляторов, а также характерные для конденсаторов большие ресурс и мощность. Производство и эксплуатация конденсаторов отличается высокой экологической чистотой.

ЭК представляет собой элемент полярной конструкции с водным электролитом. Отрицательный электрод выполнен из активированного углеродного материала с высокой удельной поверхностью. Положительным электродом является гидроксидноникелевый электрод, конструкция которого обеспечивает большую допустимую скорость заряда и разряда.

При напряжении не превышающем 1,4В ЭК полностью герметичен. Применение гидроксидноникелевого электрода примерно в 4—5 раз увеличивает удельную энергию ЭК по сравнению с удельной энергией конденсатора симметричной конструкции, в котором оба электрода выполнены из углеродного материала.

Использование специальных материалов в отрицательном электроде позволяет повысить рабочее напряжение элемента до 1,7В. В этом случае значительный вклад в накапливаемую энергию вносится псевдоемкостью отрицательного электрода, что позволяет более чем в два раза повысить энергию конденсатора.

Корпус ЭК призматической конструкции изготовлен из пластмассы. В его крышке имеется предохранительный клапан. Диапазон рабочих температур конденсатора составляет -40...+50 °С.

Имеется несколько вариантов конденсаторов для различного назначения.

«Тяговые» ЭК предназначены для использования в качестве источника энергии для электротранспорта. В этом случае в диапазоне рабочих напряжений элемента 1,7...0,8 В величина отдаваемой энергии достигает 10...12 Вт·ч/кг, а максимальная мощность составляет 500...600 Вт/кг. Из элементов собираются батареи в зависимости от назначения и вида транспорта. Такие

батареи могут использоваться также для систем аварийного энергообеспечения, в системах бесперебойного питания, в гелиоэнергетике и др.

Более мощные конденсаторы — «стартерные», обладающие малым внутренним сопротивлением, в том числе при низких температурах, предназначены для использования в коротких режимах заряда и разряда. Например, для запуска двигателей внутреннего сгорания, для систем рекуперации в электротранспорте. Максимальная удельная мощность таких конденсаторов достигает 2...3 кВт/кг.

Специальное конструктивное исполнение «стартерных» ЭК (элементы серий ЭК103, ЭК104, ЭК401) позволяет достигать высоких значений разрядной мощности при сохранении большого уровня отдаваемой энергии. На основе таких элементов выпускаются модули с необходимыми параметрами (по напряжению, энергии, мощности), способные осуществлять гарантированный пуск двигателей автомобилей и тракторов, дизель-генераторных установок, дизельных двигателей судов и тепловозов мощностью до 1500 л. с. ЭК модули могут использоваться для пуска двигателей совместно с аккумуляторной батареей или без нее.

Высокие значения удельной энергии «тяговых» ЭК, возможности их быстрого заряда и большой ресурс позволили создать суперконденсаторные модули, используемые в качестве единственного источника энергии электрогрузовиков, электробусов, заводского напольного электротранспорта и другой малой техники.

Электротранспорт на ЭК предназначен для работы на коротких или фиксированных маршрутах. В этом случае повышается эффективность перевозок в сравнении с использованием для этих целей традиционных аккумуляторных батарей.

Модули ЭК типа 300ЭК203 и 300ЭК251 применяются в электрогрузовиках и электробусах. Модули ЭК типа 60ЭК203 и 60ЭК251 используются в качестве тягового источника энергии в электротележках, электропогрузчиках, малой уборочной и другой технике вместо аккумуляторных батарей.

Использование малогабаритного бортового зарядного устройства, а также низкая потребность в обслуживании конденсаторных модулей создает возможность для круглосуточной эксплуатации техники и снимает необходимость использования специальных зарядных станций.

Основные характеристики электрохимических конденсаторов и модулей (батарей) на их основе представлены в табл. 23.11—23.13.

Таблица 23.11

## Характеристики конденсаторных элементов

Тип конденсаторов	Стартерный пуск двигателей			Тяговые источники энергии		Системы рекуперации на электротранспорте	
	ЭК401	ЭК103	ЭК104	ЭК203	ЭК251	ЭК301	ЭК302
Диапазон рабочих напряжений, В	1,3...0,8	1,3...0,8	1,3...0,3	1,3...0,8 (1,6...0,8)	1,3...0,8 (1,6...0,8)	1,3...0,8	1,3...0,8
Емкость, кФ	10	3,2	3,2	45 (110)	50 (130)	30	20
Внутреннее сопротивление, МОм	0,2	0,5	0,6	0,4	0,4	0,2	0,1
Запасаемая энергия, кДж	5,2	1,7	2,6	23,6 (100)	26,2 (120)	15,7	10,5
Удельная энергия, кДж/кг	3,7	5,0	7,6	8,4 (36)	9,3 (42)	5,6	3,2
Ток утечки при напряжении 1,3 В, мА	4,0...8,0	3,0...5,0	3,0...5,0	5,0...10,0	5,0...10,0	5,0...10,0	10...20
Ресурс, тысяч циклов	>50	>50	>50	>50 (>10)	>50(>10)	>200	500
Размеры, мм	82x32x207	25x60x120	25x60x120	82x98x237	82x98x237	82x98x207	82x98x207
Масса, кг	1,4	0,34	0,34	2,8	2,8	2,8	3,3

Примечание. В скобках указаны параметры для режима с использованием псевдоемкости.

Таблица 23.12

## Характеристики конденсаторных модулей «тягового» типа

Тип модуля	Диапазон рабочих напряжений, В	Емкость, кФ	Внутреннее сопротивление при 25°C, (-30°C), МОм	Запасаемая энергия, МДж (кВт·ч)	Масса, кг (габариты, мм)	Отдаваемая энергия при разряде током 50 А при 25 °C (-25 °C), МДж
60ЭК203	96...48	1,8	26 (40)	6,2 (1,7)	175 (530x606x455)	5,4 (4,4)
60ЭК251	96...48	2,1	26 (40)	7,2 (2,0)	175 (530x606x455)	6,2 (5,2)
300ЭК203	160...80	3,3	15 (23)	31 (8,6)	950 (2650x606x455)	27 (22)
300ЭК251	160...80	3,9	15 (23)	37 (10,2)	950 (2650x606x455)	31 (26)

**Таблица 23.13**  
**Характеристики конденсаторных модулей, предназначенных для коротких режимов разряда**

Тип модуля	Диапазон рабочих напряжений, В	Емкость, Ф	Внутреннее сопротивление, при 25°С (–30°С), МОм	Запасаемая энергия, кДж	Масса, кг (габариты, мм)	Отдаваемая энергия при разряде на нагрузку 7 МОм, при 25°С (–30°С), кДж	Средняя мощность при разряде на нагрузку 7 МОм, (–30°С), кВт
10ЭК103	13...7	320	5,0 (7,0)	19	5 (291x63x166)	— (—)	— (—)
20ЭК103	13...7	640	2,5 (3,5)	38	10 (291x125x166)	12 (5)	8,8 (8,5)
40ЭК103	13...7	1280	1,3 (1,8)	77	20 (291x254x166)	40 (24)	11 (9,7)
80ЭК103	13...7	2560	0,6 (0,9)	154	40 (291x508x166)	105 (69)	12 (11,0)
8ЭК103	13...7	800	4,0 (6,0)	48	4,5 (243x63x166)	— (—)	— (—)
16ЭК103	13...7	1600	1,0	96	9 (243x125x166)	— (16)	— (1,5)
32ЭК103	13...7	3200	1,0 (1,5)	192	18 (243x254x166)	— (46)	— (9,6)
64ЭК103	13...7	6400	0,5	384	36 (243x508x166)	— (104)	— (11)
10ЭК301	13...7	3000	2,2 (3,2)	180	37 (520x172x238)	70 (18)	8,4 (7,6)
8ЭК301	13...7	6000	1,8 (2,6)	360	31 (420x172x238)	— (39)	— (7,9)

## 24. ПОЛУПРОВОДНИКОВЫЕ МАТЕРИАЛЫ

### 24.1. Основные определения

*Полупроводниками* называют вещества, удельное сопротивление которых при нормальной температуре находится между значениями удельных сопротивлений проводников и диэлектриков (в диапазоне от  $10^{-3}$  до  $10^{10}...10^{12}$  Ом·см). Основным свойством полупроводника является зависимость его электропроводности от воздействия температуры, электрического поля, излучения и других факторов. Полупроводники в отличие от проводников имеют отрицательный коэффициент температурного удельного сопротивления, электропроводность полупроводников с увеличением температуры растет экспоненциально.

В зависимости от влияния примесей на проводимость различают *собственные* и *примесные* полупроводники.

*Собственный полупроводник* — полупроводник, не содержащий примесей, влияющих на его электропроводность.

*Примесный* — это такой полупроводник, свойства которого определяются примесями.

*Легирование* — процесс искусственного введения примесей в полупроводник для управляемого изменения его физических свойств. *Легирующим* называется химический элемент, атомы которого введены в решетку кристалла полупроводника для изменения его свойств. Примесь, атомы которой являются акцепторами называют *акцепторной*. *Акцептор* — дефект решетки, способный при возбуждении захватывать электрон из валентной зоны. Соответственно *донорной* называют *примесь*, атомы которой являются донорами. *Донор* — это дефект решетки, способный при возбуждении отдавать электрон в зону проводимости.

По структуре полупроводники делят на *кристаллические* и *аморфные*

*Монокристалл* — это целостный кристалл, который является трехмерным образованием из тождественных элементарных ячеек с разориентацией блоков не более  $1...2^\circ$ .

*Аморфный полупроводник* — полупроводник, характеризующийся отсутствием дальнего порядка в расположении атомов.

Различают полупроводники элементарные и соединения. К элементарным относятся следующие элементы таблицы Менделеева: углерод (алмаз), кремний, германий, олово, фосфор, мышьяк, сурьма, висмут, сера, селен, теллур, йод. Полупроводниковые соединения: сульфиды цинка, германия, олова, кадмия, ртути, свинца; селениды цинка, германия, олова, кадмия, ртути, свинца; теллуриды цинка, германия, олова, кадмия, ртути, свинца; арсенид и фосфит галлия; карбид кремния и др. Имеются также аморфные (стеклообразные), органические и магнитные полупроводники, свойства которых пока недостаточно изучены.

Свойства полупроводника зависят от ширины запрещенной зоны. *Запрещенная зона* — область значений энергии, которыми не могут обладать электроны в полупроводнике [17].

*Подвижность носителей заряда* — это отношение средней установившейся скорости перемещения носителей заряда в направлении электрического поля к ее напряженности.

Для производства полупроводниковых приборов широко применяются элементарные полупроводники, которые обладают поликристаллической или монокристаллической структурой, из которых наибольшее применение нашли германий и кремний. Из легированных монокристаллов германия или кремния вырезают пластины, которые являются основой для изготовления приборов и интегральных микросхем.

Основные физические свойства германия и кремния гексагональной модификации приведены в табл. 24.1 [24].

Таблица 24.1

Основные свойства германия и кремния

Свойства	Германий	Кремний
Плотность при 20 °С, Мг/м <sup>3</sup>	5,326	2,329
Температурный коэффициент линейного расширения (0...100 °С), К <sup>-1</sup>	6·10 <sup>-5</sup>	4,2·10 <sup>-6</sup>
Удельная теплопроводность, Вт/(м·К)	55	80
Удельная теплоемкость (0...100 °С), Дж/(кг·К)	333	710
Относительная диэлектрическая проницаемость	16	12,5
Температура плавления, °С	936	1414
Теплота плавления, Дж/кг	4,1·10 <sup>5</sup>	1,6·10 <sup>6</sup>
Коэффициент поверхностного натяжения при температуре плавления, Н/м	0,6	0,72
Собственное удельное сопротивление при температуре 20 °С, Ом·м	0,47	2·10 <sup>3</sup>
Период решетки, нм·10 <sup>-1</sup>	5,66	5,42

Свойства	Германий	Кремний
Ширина запрещенной зоны, эВ:		
при 0 К	0,746	1,165
при 300 К	0,665	1,12
Подвижность электронов, м <sup>2</sup> /(В·с)	0,39	0,14
Подвижность дырок, м <sup>2</sup> /(В·с)	0,19	0,05
Работа выхода электронов, эВ	4,8	4,3
Собственная концентрация носителей заряда, м <sup>-3</sup>	2,5·10 <sup>19</sup>	10 <sup>16</sup>

## 24.2. Германий

Германий, наряду с кремнием, является одним из основных материалов для изготовления полупроводниковых приборов.

Получают германий путем последовательной переработки исходного сырья в тетрахлорид германия — жидкость с температурой кипения 83 °С, последующего ее гидролиза с получением двуокиси германия и его восстановления при температуре 650...700 °С. Порошок германия при этом спекается в поликристаллические слитки. Германий особой чистоты получают методом зонной плавки. Легированные монокристаллы выращивают методом вытягивания из расплава германия.

На основе германия выпускаются: выпрямительные плоскостные диоды на прямые токи от 0,3 до 1000 А при падении напряжения не более 0,5 В; лавинно-пролетные и туннельные диоды, варикапы, точечные высокочастотные, импульсные и СВЧ-диоды и сплавные биполярные транзисторы. Германий применяют для изготовления датчиков Холла и других магниточувствительных приборов, фототранзисторов и фотодиодов, оптических линз с большой светосилой (для инфракрасных лучей), оптических фильтров, модуляторов света и коротких радиоволн, а также счетчиков ядерных частиц.

Диапазон рабочих температур германиевых приборов –60...+70 °С. Недостатком германия является невысокий верхний предел рабочей температуры.

Для производства полупроводниковых приборов по ГОСТ 16153-80 применяются монокристаллы германия. Монокристаллы германия изготовляют электронного типа проводимости, легированные сурьмой, и дырочного типа проводимости, легированные галлием.

Выбор номинала удельного электрического сопротивления монокристаллов проводят по рядам:

от 0,1 до 1 Ом·см — 0,1; 0,12; 0,15; 0,2; 0,25; 0,31; 0,4; 0,5; 0,63; 0,8; 1 Ом·см;

от 1 до 10 Ом·см — 1,1; 1,40; 1,8; 2,2; 2,8; 3,5; 4,5; 5,6; 7,1; 9 Ом·см;

от 10 до 45 Ом·см — 11,2; 14; 18; 22,4; 28; 35,5; 45 Ом·см [8].

Плотность дислокации и геометрические размеры монокристаллов германия представлены в табл. 24.2.

Таблица 24.2

Плотность дислокации и геометрические размеры монокристаллов германия

Подгруппа по плотности дислокации	Плотность дислокации, см <sup>2</sup> , не более	Диаметр монокристалла, мм	Длина монокристалла, мм, не менее
1	$5 \cdot 10^4$	28...40	60
2	$2 \cdot 10^4$	28...40	50
3	$8 \cdot 10^5$	28...40	50

Подвижность носителей заряда в монокристаллах германия в зависимости от удельного электрического сопротивления и типа проводимости соответствует значениям в табл. 24.3.

Таблица 24.3

Подвижность носителей заряда в монокристаллах германия

Удельное электрическое сопротивление, Ом·см	Подвижность носителей заряда при 23 °С, см <sup>2</sup> /(В·с), не менее	
	электронов	дырок
от 0,1 до 0,23	1800	1300
от 0,24 до 0,49	2300	1400
от 0,50 до 0,89	2600	1500
от 0,9 до 2,4	3100	1600
от 2,5 до 5,9	3300	1760
от 6,0 до 15,9	3400	1760
от 16 до 45	3600	1760

## 24.3. Кремний

Для производства полупроводниковых приборов используются монокристаллические слитки кремния. В качестве легирующих примесей используются фосфор или бор, которые

отличаются высокой растворимостью в кремнии. В первом случае говорят о дырочной проводимости, во втором — об электронной. Поликристаллический кремний получают из двуокиси кремния химическим путем. Монокристалл кремния, обладающий заданными электрофизическими свойствами, выращивают методами вытягивания из расплава и бестигельной зонной плавки. В первом случае получают крупные монокристаллы с удельным сопротивлением менее 2,5 Ом·м. Во втором — высокоомные монокристаллы (до 200 Ом·м) с малым содержанием остаточных примесей.

Эпитаксиальный кремний получается методом ориентированного осаждения кристаллов кремния на подложку — пластины, вырезаемые из кремниевых слитков. Легирование осуществляется парами соединений, содержащих легирующие элементы.

Слитки монокристаллического кремния в зависимости от типа проводимости, удельного электрического сопротивления, диаметра делят на группы и подгруппы (табл. 24.4).

Таблица 24.4

Свойства монокристаллов кремния

Марка кремния и группа	Под-группа	Удельное электрическое сопротивление		Плотность дислокации, см <sup>2</sup> , не более	Диаметр слитка, мм	Ориентация слитка
		номинал, Ом·см	предельное отклонение, %			
ЭКДВ-1	а	1...20	±20	10	33,5	(111)
	б				42,5	
	в				52,5	
	г				62,5	
	д				72,5	
ЭКДВ-2	а—д	1...20	±15	10	33,5...72,5	(111)
ЭКДБ-3	а—д	0,005...1	±15	3·10 <sup>3</sup>	33,5...72,5	(111)
ЭКДБ-4	а—д	0,005...1	±10	3·10 <sup>3</sup>	33,5...72,5	(111)
ЭКДБ-5	а—г	0,5...20	±20	10 <sup>3</sup>	33,5...62,5	(100)
ЭКДВ-6	а—г	0,5...20	±20	10	33,5...62,5	(100)
ЭКДБ-7	а—д	0,01...0,1	±20	10	33,5...72,5	(111)
ЭКЭС-8	а—д	0,01...0,1	±15	10	33,5...72,5	(111)
ЭКЭФ-9	а—д	0,01...1	±20	3·10 <sup>3</sup>	33,6...72,5	—
ЭКЭФ-10	а—д	0,01...1	±15	3·10 <sup>3</sup>	33,5...72,5	(111)
ЭКЭФ-11	а—д	1...20	±20	10	33,5...72,5	(111)
ЭКЭФ-12	а—д	1...20	±15	10	33,5— 72,5	(111)

Марка кремния и группа	Под-группа	Удельное электрическое сопротивление		Плотность дислокации, см <sup>2</sup> , не более	Диаметр слитка, мм	Ориентация слитка
		номинал, Ом·см	предельное отклонение, %			
ЭКЭФ-13	а—г	0,1...10	±20	2·10 <sup>3</sup>	33,5...62,5	(100)
ЭКЭФ-14	а—г	0,1...10	±20	10	33,5...62,5	(100)

П р и м е ч а н и е. Буквы в обозначении марок означают: Э — эпитаксиальная структура; К — кремний монокристаллический; Д или Э — соответственно дырочная или электронная проводимость; легирующие примеси: Б — бор; С — сурьма; Ф — фосфор.

Монокристаллические слитки кремния, используемые в производстве *силовой полупроводниковой техники*, в зависимости от способа их получения обозначают либо буквами А, Б, В, Г без индексов и с индексами, либо двумя буквами, одна из которых Б, другие А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, И (метод зонной плавки). Сведения о монокристаллическом кремнии, полученном тем или другим способом, приведены в табл. 24.5.

Таблица 24.5  
Свойства монокристаллического кремния

Марка	Интервал удельных сопротивлений, Ом·см	Допустимый разброс удельного сопротивления, %	Плотность дислокации на нижнем торце слитка, см <sup>-2</sup>	Длина слитка, мм, не менее	Длина диффузии неосновных носителей заряда, мм, не менее	Интервал предельных диаметров слитка, мм
А	1...25	±20	10	40	0,1	27...40
Б	25...45	±20	10	40	0,1	27...40
Б <sub>1</sub>	25...45	15	5·10 <sup>4</sup>	30	0,12	27...35
В	45...75	—	10	40	0,12	27...40
Д	45...110	±30	10	60	0,1	27...40
Г	50...140	—	5·10 <sup>4</sup>	40	0,12	27...40
Г	80...180	—	10	40	0,3	54...56
Б <sub>4</sub>	20...60	—	10 <sup>4</sup>	40	0,1	27...40
Б <sub>2</sub>	5...55	±10	10	40	0,2	29,5; 37,5; 46,5; 66,5
Б <sub>3</sub>	6...55	±10	10	40	0,2	29,5; 37,5 46,6; 56,5
БА	12...25	±20	5·10 <sup>4</sup>	40	0,1	25...30
ББ	25...45	±20	5·10 <sup>4</sup>	40	0,1	25...30

Окончание табл. 24.5

Марка	Интервал удельных сопротив- лений, Ом·см	Допусти- мый раз- брос удель- ного сопро- тивления, %,	Плотность дислокации на нижнем торце слитка, см <sup>-2</sup>	Длина слитка, мм, не менее	Длина диффу- зии неоснов- ных носителей заряда, мм, не менее	Интервал предель- ных диа- метров слитка, мм
БВ	45...75	—	$5 \cdot 10^4$	40	0,1	25...30
БГ	50...140	—	$5 \cdot 10^4$	40	0,1	25...30
БГ <sub>1</sub>	50...140	—	$5 \cdot 10^4$	30	0,1	25...30
БД	80...140	—	10	30	0,25	33...37
БД <sub>1</sub>	80...150	—	10	30	0,25	33...37
БЕ	140...260	—	$5 \cdot 10^4$	40	0,2	43...47
БЕ <sub>1</sub>	140...260	—	$5 \cdot 10^4$	40	0,2	33...37
БЕ <sub>2</sub>	190...260	—	10	30	0,3	43...47
БЖ	180...300	—	$5 \cdot 10^4$	30	0,35	43...47
БЖ	180...320	—	$5 \cdot 10^4$	30	0,2	43...47
БИ	250...500	—	$5 \cdot 10^4$	40	0,2	33...37
БИ <sub>1</sub>	200...500	±25	$5 \cdot 10^4$	40	0,3	33...37
БЕ <sub>3</sub>	5...50	16	10	45	0,16	40...50
	50...100	16	10	45	0,25	40...50
	100...600	16	10	45	0,35	40...50
	5...50	15	10	46	0,16	50...60
	50...100	15	10	46	0,25	50...60
	100...600	15	10	46	0,35	50...60

## 25. СВЕРХПРОВОДЯЩИЕ МАТЕРИАЛЫ

Ряд металлов и сплавов и иных материалов при весьма низких температурах, близких к абсолютному нулю, резко снижают свое удельное сопротивление, которое может принимать значения порядка  $10^{-25}$  Ом·м, что в  $10^{17}$  раз меньше, чем сопротивление меди, а плотность тока более  $10^9$  А/м<sup>2</sup>. Свойство материалов, состоящее в том, что их электрическое сопротивление скачком падает до нуля при охлаждении ниже определенной критической температуры  $T_{кр}$ , характерной для данного материала, называют сверхпроводимостью. На состояние сверхпроводимости влияет также величина магнитной индукции, наибольшее допустимое значение которой также называют критической.

Сверхпроводимостью обладают 26 металлов. При этом лучшие проводники-металлы (серебро, медь, золото) сверхпроводимостью не обладают. Значения критической температуры и критической магнитной индукции для некоторых элементов при нормальном давлении приведены в табл. 25.1 [8].

Таблица 25.1  
Металлы, их критическая температура и магнитная индукция

Элемент	Критическая температура элемента, К	Критическая магнитная индукция, Тл
Алюминий	1,19	0,0099
Ванадий	5,3	0,1370
Вольфрам	0,012	0,1070
Галлий	1,09	0,0051
Индий	3,40	0,0293
Иридий	0,14	6,0020
Кадмий	0,55	0,0030
Ниобий	9,2	0,1944
Осмий	0,65	0,0065
Олово	3,72	0,0309
Рений	1,7	0,0198
Рутений	0,5	0,0066

Окончание табл. 25.1

Элемент	Критическая температура элемента, К	Критическая магнитная индукция, Тл
Свинец	7,2	0,0803
Тантал	4,39	0,0130
Торий	1,37	0,0162
Титан	0,39	0,0100
Таллий	2,39	0,0171
Цинк	0,9	0,0053
Цирконий	0,55	0,0047

Величина критической температуры зависит от давления и внешнего магнитного поля, технологии изготовления образцов, структуры кристаллов и сплавов.

Сверхпроводимостью обладает также ряд сплавов и химических соединений, сведения о которых приведены в табл. 25.2. Сверхпроводимость в этих материалах возникает при значительно более высокой температуре, чем у чистых элементов. При этом особое место занимают материалы на основе ниобия.

Таблица 25.2

Критическая температура некоторых сверхпроводящих сплавов  
и химических соединений

Сплавы и соединения на основе ниобия	$T_{кр}$ , К	Другие сплавы и соединения	$T_{кр}$ , К
$Nb_3Ge$	23,2	$(Y_{0,7}Th_{0,3})xC_{3,1}$	17,0
$Nb_3Sn$	18,3	$Pb_{0,92}Mo_6S_7$	15,2
$NbN$	17,3	$LiTi_2O_4$	13,7
$NbRu_3$	15...16	Mo, N	13...14
$Nb_{0,75}Zr_{0,25}$	11,0	$B_5Mo_{1,69}Zr_{0,31}$	11,2
$NbTc_3$	10,5	Rh $Zr_3$	11,1
$Nb_{0,75}Ti_{0,25}$	10,0	$Li_{0,1...0,3}Ti_{1,1}S_2$	10...13
$NbSe_2$	7,0	—	—
$NbS_3$	5,4	$Mo_{0,38}Re_{0,62}$	14,6

Сверхпроводники с критической температурой, превышающей температуру жидкого азота (77 К), называются *высокотемпературными сверхпроводниками*. Это керамические материалы, которые образуют три группы.

К первой группе относятся редкоземельные материалы типа  $R\text{Ba}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-x}$ , где в качестве  $R$  кроме иттрия выступают редкоземельные элементы иттриевой группы: Nd, La, Sm, Eu, Gd, Ho, Er, Tm, Yb, Lu. При  $x < 0,2$  значения критической температуры этой группы материалов лежат в диапазоне 85...95 К.

Ко второй группе относятся висмутовые соединения  $\text{Bi}_2\text{CaCr}_2\text{Cu}_2\text{O}_8$  ( $T = 80...85$  К) и  $\text{BiCa}_2\text{Cr}_2\text{O}_{10-x}$  ( $T = 110...115$  К).

К третьей — таллиевые соединения  $\text{TlCaBaCu}_2\text{O}_{5,5+x}$ ,  $\text{Tl}_2\text{CaBa}_2\text{Cu}_2\text{O}_{8+x}$ ,  $\text{Tl}_2\text{Ca}_2\text{Ba}_2\text{Cu}_2\text{O}_{10-x}$ , соответственно имеющие критические температуры 120, 125 и 106...108 К. Известно до 2000 сверхпроводящих материалов.

Выпускаются сверхпроводящие многожильные многослойные (металл—сверхпроводник) проволоки и ленты. Методом твердофазной диффузии получают гибкие композиции из тонких нитей ниобия в матрице из оловянной бронзы, в которой при нагреве образуется сверхпроводящая пленка стannида ниобия  $\text{Nb}_3\text{Sn}$ .

## ЛИТЕРАТУРА

### К разделу 1

1. *Выгодский М. Я.* Справочник по элементарной математике.— М.: Наука, 1964.— 870 с., ил.
2. *Бронштейн И. Н., Семендяев К. А.* Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов.— М.: Физматгиз, 1962.
3. *Анго Анри.* Математика для электро- и радиоинженеров.— М.: Наука, 1965.— 780 с., ил.
4. Электротехнический справочник. Т. 1.— М.: Энергоиздат, 1966.
5. *Астафьев А. Ф.* Инженерная справочная книга. Т. 1. 16-е изд. — ОНТИ НКТП СССР, 1937.
6. *Лузин Н. Н.* Дифференциальное исчисление.— М.: Советская наука, 1958.— 474 с.
7. *Лузин Н. Н.* Интегральное исчисление.— М.: Советская наука, 1958.— 460 с.

### К разделам 2 и 3

8. Электротехнический справочник. В 3 т. Т. 1 / Под общей ред. профессоров МЭИ: Герасимова В. Г. и др. 9-е изд. — М.: Издательство МЭИ, 2003. — 440 с.
9. Электротехнический справочник. В 3 т. Т. 2 / Под общей ред. профессоров МЭИ: Герасимова В. Г. и др. 9-е изд. — М.: Издательство МЭИ, 2003. — 518 с.
10. Электротехнический справочник. В 3 т. Т. 3. Кн. 1 и 2. / Под общей ред. профессоров МЭИ: Герасимова В. Г. и др. 9-е изд. — М.: Издательство МЭИ, 2003.
11. *Нейман Л. Р., Демирчан К. С.* Теоретические основы электротехники. В 2 т. Т. 1. — Л.: Энергия, 1981. — 536 с.
12. *Нейман Л. Р., Демирчан К. С.* Теоретические основы электротехники. В 2 т. Т. 2. — Л.: Энергия, 1981. — 416 с.
13. *Алиев И. И., Калганова С. Г.* Электротехнические материалы и изделия. — М.: ИП РадиоСофт, 2004. — 352 с.

14. Алиев И. И. Справочник по электротехнике и электрооборудованию. 4-е изд. — М.: Высшая школа, 2005. — 256 с.

15. Правила технической эксплуатации электроустановок потребителей и Правила техники безопасности при эксплуатации электроустановок потребителей. — М.: Энергоатомиздат, 1990. — 160 с.

16. Правила устройства электроустановок — М.: Энергоиздат, 1997.

17. Электротехника. Терминология: Справочное пособие. Вып. 3. — М.: Издательство стандартов, 1989. — 344 с.

18. Справочник по электротехническим материалам / Под ред. Корицкого Ю. В., Пасынкова В. В., Тареева Б. М., Т. 1—3. — Л.: Энергоатомиздат, 1988.

19. Электротехнические материалы: Справочник/ В. Б. Березин, Н. С. Прохоров, Г. А. Рыков, А. М. Хайкин. — 3-е изд., доп. и перераб. — М.: Энергоатомиздат, 1983. — 504 с.

20. Алиев И. И. Кабельные изделия. Справочник. 2-е изд. доп. — М.: Высшая школа, 2004. — 232 с.

21. Электроизоляционные материалы. Каталог ЗАО «Электроизолит». — Хотьково, 2002. — 28 с.

22. Магнитопроводы ГАММАМЕТ. Каталог НПП ГАММАМЕТ. — Екатеринбург, 2003. — 23 с.

23. Аксенов А. И., Нефедов А. В. Резисторы, конденсаторы, провода... — М.: Солон-Р, 2000. — 240 с.

24. Пасынков В. В., Сорокин В. С. Материалы электронной техники. СПб.: Лань, 2003. — 368 с.

**ИЗДАТЕЛЬСТВО «РАДИОСОФТ»**

http://www.radiosoft.ru e-mail: info@radiosoft.ru

**Отдел реализации**

тел./факс: (095) 177-4720 e-mail: real@radiosoft.ru

**Адрес и телефон**

**для заявок на книги по почте:**

111578 Москва, Саянская, 6а, «Пост-Агентство»,  
тел: (095) 307-0661, 307-0621 e-mail: postpres@dol.ru

**ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ  
СПРАВОЧНИК**

**Том 1**

Составитель *И. И. Алиев*

Ответственный за выпуск *А. А. Халоян*

Редактор *М. В. Толмачева*

Дизайнер *Л. К. Абдрашитова*

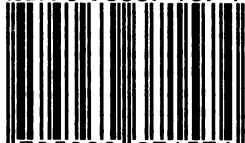
Компьютерная верстка *Е. Р. Данилов, О. Н. Розанова*

Сдано в набор 10.11.2005. Подписано в печать 13.05.2006.  
Формат 84x108/32. Гарнитура «Прагматика». Бумага офсетная.  
Печать офсетная. Печ. л. 15. Тираж 2000 экз. Заказ **4768**

Издательское предприятие РадиоСофт  
109125, Москва, Саратовская ул., д. 6/2

ОАО «Владимирская книжная типография»  
600000, г Владимир, Октябрьский проспект, д. 7  
Качество печати соответствует качеству предоставленных диапозитивов

**ISBN 5-93037-157-1**



9 785930 371574 >

